MARIO LIVIO

MARIO LIVIO este astronom şi fost şef al Departamentului de Ştiinţă de la Space Telescope Science Institute (STScI) – institutul care coordonează programul ştiinţific al Telescopului Spaţial Hubble. A obţinut doctoratul în astrofizică teoretică la Universitatea Tel Aviv din Israel şi a fost profesor la Institutul de Tehnologie Technion – Israel începând din 1981 până în 1991, când s-a angajat la STScI. Dr. Livio a publicat peste 400 de articole ştiinţifice şi a primit numeroase distincţii, atât pentru cercetările făcute, cât şi pentru capacităţile sale didactice deosebite. Este autorul cărţii *Secţiunea, de aur,* un titlu foarte bine primit de cititori, despre matematică şi arte, pentru care i s-au decernat premiile Pythagoras şi Pearo.

MARIO LIVIO

Ecuaţia care n-a putut fi rezolvată

Matematicieni de geniu descoperă limbajul simetriilor

Traducere din engleză de MIHNEA MOROIANU

HUMANITAS

Redactor: Diana Constantinescu Coperta: Ionuţ Broştianu Tehnoredactor: Luminiţa Simionescu Corector: Maria Nicolau DTP: Dumitru Olteanu

MARIO LIVIO

THE EQUATION THAT COULDNT BE SOLVED

© 22005 by Mario Livio

Originally published by SIMON & SCHUSTER, Inc. All rights reserved

© HUMANITAS, 2007 (ediţia print)

© HUMANITAS, 2014 (ediţia digitală)

ISBN 978 – 973 – 50 – 4633 – 0 (pdf)

EDITURA HUMANITAS

Piaţa Presei Libere 1, 013701 Bucureşti, România tel.

021/408 83 50, fax 021/408 83 51
www.humanitas.ro
Comenzi online: www.libhumanitas.ro Comenzi prin e-mail: vânzări libhumanitas.ro Comenzi telefonice: 0372.743.382; 0723.684.194

Pentru Sofie

1

Simetria

O pată de cerneală pe o foaie de hârtie nu este deosebit de atrăgătoare pentru ochi, dar dacă îndoiţi hârtia înainte să se usuce cerneala, puteţi obţine o formă ca cea din figura 1, care ridică mai multe întrebări. Mai mult decât atât, interpretarea unor asemenea pete de cerneală stă la baza faimosului test Rorschach1, elaborat în anii 1920 de către psihiatrul elveţian Hermann Rorschach. Scopul declarat al testului este să scoată cumva la suprafaţă temerile neştiute, fanteziile sălbatice şi gândurile mai ascunse ale privitorilor care interpretează formele ambigue. Valoarea reală a testului, de „rază *X* a minţii", este vehement dezbătută în cercurile psihologilor. După cum s-a exprimat cândva psihologul Scott Lilienfeld de la Emory University, „A cui minte, a clientului sau a examinatorului?" Cu toate acestea, este incontestabil că imagini precum cea din figura 1 produc un anumit gen de impresie, fascinantă şi atrăgătoare. De ce?

Să fie oare datorată simetriei bilaterale a corpului uman, majorităţii animalelor şi atâtor artefacturi realizate de om? Şi, în primul rând, cum se face că toate aceste entităţi zoologice şi creaţii ale imaginaţiei umane prezintă o asemenea simetrie?

Cei mai mulţi oameni percep compoziţiile armonioase precum *Naşterea lui Venus* de Botticelli2

(figura 2) ca fiind simetrice. Istoricul de artă Ernst H. Gombrich observă chiar că „libertăţile pe care Botticelli şi le lua în raport cu natura pentru a obţine o configuraţie graţioasă sporesc frumuseţea şi armonia desenului". Totuşi matematicienii vă vor spune că aranjamentele de culori şi forme din acest tablou nu sunt câtuşi de puţin simetrice în

sens matematic. Dimpotrivă, cei mai mulţi privitori ne-matematicieni nu percep modelul din figura 3 ca fiind simetric, deşi el este în fapt simetric conform cu definiţia matematică exactă. Aşadar, ce este simetria? Joacă ea vreun rol în percepţie, şi care anume? Cum este legată de sensibilitatea noastră estetică? Şi cum se face că în domeniul ştiinţific simetria a devenit un concept crucial, ce stă la baza viziunii noastre asupra lumii înconjurătoare şi a teoriilor fundamentale care încearcă s-o explice? Dat fiind că simetria penetrează un atât de larg evantai de discipline, ce „limbaj" şi „gramatică" folosim pentru a caracteriza simetriile şi atributele lor, şi cum a fost inventat limbajul acesta universal? Sau într-o formulare mai simplistă, poate furniza simetria un răspuns la întrebarea decisivă pusă prin titlul unuia din cântecele starului rock Rod Stewart – „Îţi par cumva sexy?" Voi încerca să dau măcar răspunsuri parţiale la toate aceste întrebări şi la multe altele. Şi sper că povestea, per ansamblu.

va zugrăvi atât latura umanistă a matematicii, cât şi, ceea ce e mai important, latura umană a matematicienilor. După cum vom vedea, simetria este principalul instrument pentru aruncarea de punţi peste prăpastia dintre ştiinţă şi artă, dintre psihologie şi matematică. Ea îşi manifestă prezenţa în obiecte şi concepte, mergând de la covoarele

persane până la moleculele vieţii, de la Capela Sixtină până la mult căutata „Teorie a tot ce există”. Cu toate acestea, teoria grupurilor, limbajul matematic care descrie esenţa simetriilor şi explorează proprietăţile lor, n-a rezultat nicidecum din studiul acestora. Ea reprezintă o uimitoare idee unificatoare a gândirii moderne, provenită dintr-o sursă neaşteptată – o ecuaţie care n-a putut fi rezolvată. Povestea dramatică şi întortocheată a acestei ecuaţii constituie un segment esenţial din saga noastră intelectuală. În acelaşi timp, povestea aceasta aruncă o lumină asupra singurătăţii geniului şi a tenacităţii intelectului uman în faţa provocărilor aparent insurmontabile. Am depus un efort extraordinar pentru a încerca să rezolv misterul vechi de două sute de ani al morţii protagonistului acestei povesti – strălucitul matematician Evariste Galois. Cred că m-am apropiat de adevăr mai mult decât a fost până acum cu putinţă.

Spiritualul dramaturg George Bernard Shaw a spus cândva: „Omul raţional se adaptează pe sine la lume; cel neraţional persistă în încercarea de a adapta lumea la el. De aceea, orice progres depinde de omul neraţional”. În această carte vom întâlni multe persoane neraţionale, de ambele sexe. Procesul creator, prin însăşi natura lui, caută terenuri intelectuale şi emoţionale încă neexplorate. Mici excursuri în abstracţia matematică ne vor oferi posibilitatea de a arunca priviri în însăşi natura creativităţii. Încep cu o concisă explorare a miraculosului domeniu al simetriei.

Imunitate fată de schimbări

Cuvântul *simetrie* are rădăcini antice3, provenind din termenii greceşti *sym* şi *metria,* care se traduc prin „aceeaşi măsură”. Atunci când grecii puneau asupra unei opere de artă sau a unui plan arhitectural eticheta de „simetric”, ei înţelegeau că în lucrare putea fi identificată o mică porţiune care să fie cuprinsă în dimensiunile tuturor celorlalte părţi de un număr precis de ori (părţile erau „comensurabile”). Această definiţie timpurie corespunde mai degrabă noţiunii noastre moderne de

proporţie, decât celei de simetrie. Cu toate acestea, marii filosofi Platon (428/427 – 348/347 î.Hr.) şi Aristotel (384 – 322 î.Hr.) n-au ezitat să asocieze simetria cu frumuseţea. Conform lui Aristotel, „principalele forme ale frumuseţii sunt aşezarea ordonată (în greceşte *taxis*), proporţia (*symmetria*) şi determinarea (*horismenon*), care sunt dezvăluite îndeosebi de matematică". Mergând pe urmele grecilor, identificarea simetriei cu „justa proporţie" a fost ulterior răspândită de influentul arhitect roman Vitruviu4 (cca. 70 – 25 î.Hr.), şi ea s-a menţinut în întreaga perioadă a Renaşterii. În lucrarea sa *de Architectura Libri Decem (Zece cărţi despre arhitectură)*, o adevărată Biblie arhitecturală a Europei vreme de secole, Vitruviu scrie:

Planul unui templu depinde de simetrie, ale cărei principii trebuie respectate cu grijă de către arhitect. Ele se datorează proporţiei. Proporţia este o corespondenţă între măsurile elementelor unei întregi opere, şi între întreg în raport cu o anumită parte selectată drept standard. De aici rezultă principiile simetriei.

În sens matematic precis, semnificaţia modernă a simetriei5 (dată pentru prima dată la sfârşitul secolului al XVIII-lea) este efectiv de „imunitate faţă de o schimbare posibilă". Sau, după cum s-a exprimat cândva matematicianul Hermann Weyl (1885 – 1955), „un lucru este simetric dacă acţionând asupra lui, după ce ţi-ai terminat treaba, el arată la fel ca înainte". Să examinăm de pildă versurile6:

E ciudat ce asimetrica.
E „simetria"?
„Simetria" e asimetrica.
Ce ciudat e.

Această strofă rămâne neschimbată dacă e citită cuvânt cu cuvânt de la sfârşit spre început – este simetrică în raport cu citirea inversată. Dacă vă imaginaţi că aceste cuvinte ar fi aranjate precum nişte mărgele pe un fir, aţi putea privi (figurat vorbind) această citire inversată ca fiind un fel de reflectare în oglindă a strofei. Strofa nu se schimbă atunci când e reflectată în oglindă în sensul sus-

pomenit – ea este simetrică în cazul unei astfel de reflecţii în oglindă. Pe de altă parte, dacă preferaţi să consideraţi că aţi citi poemul cu voce tare, atunci citirea de la sfârşit spre început corespunde unei întoarceri în timp, ceva în genul unei derulări în sens invers a unei videocasete (din nou, nu în sens literal, deoarece sunetele individuale nu sunt inversate). Grupurile de cuvinte cu această proprietate se numesc *palindromuri7.*

Inventarea palindromurilor este atribuită în genere lui Sotades cel Obscen din Maronea, care a trăit în secolul al III-lea î.Hr. În Egipt, dominat pe atunci de greci. Palindromurile au fost extrem de populare printre mulţi renumiţi amatori de jocuri de cuvinte, precum englezul J.A. Lindon şi minunatul autor de probleme matematice recreative, Martin Gardner. Unul dintre amuzantele palindromuri ale lui Lindon, având cuvântul drept unitate, sună aşa: „Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.”[1] Alte palindromuri sunt simetrice la citirea literă cu literă de la sfârşit la început – „Able was I ere I saw Elba” [2]8 (atribuit în glumă lui Napoleon) sau titlul unui faimos program NOVA: „A man, a Plan, a Canal, Panamá”[3].

În mod surprinzător, palindromurile nu apar doar în jocuri ingenioase de cuvinte, ci şi în structura cromozomului masculin Y9, a cărui descriere genetică completă a fost obţinută abia în 2003. Această realizare a încununat un efort eroic şi a dezvăluit că puterile de autoconservare ale acestui cromozom sexual au fost grosolan subestimate. Alte perechi de cromozomi umani luptă împotriva mutaţiilor dăunătoare făcând schimb de gene. Deoarece cromozomul Y este lipsit de partener, biologii estimaseră anterior că încărcătura lui genetică

---

1 „Fată, îmbăiată pe bikini, observând băiatul, descoperă băiatul observând bikini pe îmbăiată fată“ *(n. r.).*

2 „Capabil am fost înainte de a vedea Elba.“ In limba română nu este palindrom *(n. r.).*

3 „Un bărbat, un plan, un canal, Panama.“ In limba română nu este palindrom *(n. r.*).

riscă să se epuizeze în nu mai mult de cinci milioane de ani. Spre uimirea lor, cercetătorii echipei de studiere a cromozomului Y au descoperit că el luptă împotriva pieirii prin palindromuri. În jur de şase milioane din cele cincizeci de milioane de „litere" ADN ale sale formează secvenţe palindromice – secvenţe care se citesc în acelaşi fel înainte şi înapoi pe cele două catene ale elicei duble. Acestea nu numai că facilitează revenirile în cazul unor mutaţii nefavorabile, dar ele îi permit cromozomului, într-o anumită măsură, să se împerecheze cu el însuşi – catenele îşi pot schimba poziţiile, iar genele se amestecă. După formularea şefului echipei de la Massachusetts Institute of Technology, David Page, „cromozomul Y este o sală a oglinzilor".

Bineînţeles, cel mai familiar exemplu de simetrie în oglindă este cel al simetriei bilaterale, care caracterizează regnul animal10. De la fluturi la balene şi de la păsări la oameni, dacă reflectezi jumătatea stângă într-o oglindă, obţii ceva aproape identic cu jumătatea dreaptă. Voi ignora pentru moment micile, foarte greu observabilele diferenţe externe care există, precum şi faptul că nici anatomia internă, nici funcţiile creierului nu posedă simetrie bilaterală.

Pentru mulţi oameni, cuvântul *simetrie* înseamnă simetrie bilaterală. Chiar şi în *Webster's Third New International Dictionary,* una dintre definiţii sună aşa: „Corespondenţă în mărime, formă şi poziţie relativă a elementelor care sunt de părţi opuse ale unei linii despărţitoare sau ale unui plan median". Descrierea matematică precisă a simetriei de reflectare foloseşte acelaşi concept. Luaţi desenul unui fluture bilateral simetric şi trasaţi o linie dreaptă pe mijlocul lui. Dacă îndoiţi desenul de-a lungul liniei centrale, se va produce o suprapunere perfectă. Fluturele rămâne neschimbat – invariant – la o reflexie făcută în raport cu linia sa centrală.

Simetria bilaterală este atât de răspândită la animale, încât e greu să fie considerată întâmplătoare. În fapt, considerând că un organism este o imensă mulţime

de trilioane şi trilioane de molecule, modalităţile de a construi, pornind de la aceste blocuri elementare, configuraţiile asimetrice sunt infinit mai numeroase decât cele simetrice. Cioburile unui vas spart pot zăcea grămadă în multe moduri diferite, dar reunirea lor, pentru reconstituirea vasului intact (şi de obicei bilateral simetric) se poate face într-un singur mod. Şi totuşi rămăşiţele fosile din Ediacara Hills, Australia, arată că organisme cu corp moale *(Spriggina)* datând din diviziunea Vendian a Precambrianului protozoic (cu 650 până la 543 de milioane de ani în urmă) prezentau deja o simetrie bilaterală.

Dat fiind că formele de viaţă de pe pământ au fost modelate în ere întregi de evoluţie şi selecţie naturală, aceste procese trebuie să fi preferat cumva simetria bilaterală sau în oglindă. Dintre toate formele diferite pe care fiinţele ar fi putut să le ia, cele bilateral simetrice au ieşit preponderente. Concluzia inevitabilă este că această simetrie a fost rezultatul probabil al creşterii biologice. Putem oare înţelege cauza unei astfel de predilecţii? Am putea cel puţin încerca să-i găsim una dintre rădăcini, în legile mecanicii. Dacă pornim de aici, observaţia de bază este că diferitele direcţii în care ne mişcăm nu sunt echivalente între ele. O distincţie clară între sus şi jos *(dorsal* şi *ventral* la animale, în limbaj biologic) este făcută de gravitaţia terestră. În majoritatea cazurilor, ceea ce urcă trebuie să coboare, dar nu şi invers. O altă deosebire, între faţă şi spate, este rezultatul funcţiei de locomoţie.

Orice fiinţă care se mişcă relativ iute – în mare, pe uscat sau în aer – are un avantaj clar dacă extremitatea ei frontală este diferită de cea dorsală. Dispunerea în faţă a tuturor organelor senzoriale – principalii detectori de lumină, sunet, miros °i gust – o ajută evident pe respectiva fiinţă să decidă unde să se ducă şi cum să ajungă mai repede acolo. Un „radar” frontal oferă de asemenea o avertizare timpurie asupra pericolelor potenţiale. Gura poziţionată în faţă poate face toată diferenţa între a prânzi cel dintâi sau nu. În acelaşi timp, mecanica efectivă a mişcării (în special pe uscat şi în aer) sub influenţa forţei

gravitaţionale a dus la stabilirea unei deosebiri clare între noţiunile de jos şi sus. De îndată ce viaţa s-a răspândit din mare pe uscat, a fost necesară dezvoltarea unui gen de dispozitive mecanice – picioarele –, destinate deplasării animalului. Asemenea părţi organice secundare nu erau necesare în aer, aşa încât deosebirea între sus şi jos a devenit şi mai pronunţată. Aerodinamica zborului (tot sub influenţa gravitaţiei terestre) s-a combinat cu necesitatea dezvoltării unui aparat de aterizare şi a unor mijloace de deplasare pe pământ pentru a produce la păsări diferenţa între sus şi jos.

Aici trebuie să facem însă o constatare importantă: *În apă, pe uscat sau în aer nu există niciun criteriu de bază prin care să se facă deosebirea între stânga şi dreapta.* Şoimul, privind spre dreapta, vede aproape acelaşi mediu înconjurător ca atunci când priveşte spre stânga. Lucru care nu este adevărat pentru sus şi jos – sus este direcţia în care şoimul se ridică spre cer, în vreme ce jos este cea în care coboară pe pământ şi-şi construieşte cuibul. Lăsând la o parte clişeele politice, pe pământ nu există mari deosebiri între stânga şi dreapta, fiindcă nu există forţe orizontale puternice. Desigur, rotaţia planetei în jurul axei sale şi câmpul magnetic terestru (faptul că Pământul acţionează asupra vecinătăţilor sale ca o bară magnetică) creează o asimetrie. Dar acest efect nu este nici pe departe atât de semnificativ la nivel macroscopic ca cele ale gravitaţiei şi ale mişcării rapide a fiinţelor.

Explicaţiile de până acum spun de ce simetria bilaterală a organismelor vii are sens din punct de vedere mecanic. Totodată, ea este şi economică – obţineţi două organe la preţ de unu. Cum a rezultat simetria sau lipsa de simetrie din biologia evoluţionistă (gene) sau, mai de departe, din legile fizicii este o întrebare dificilă, asupra căreia voi reveni în capitolele 7 şi 8. Aici nu voi mai spune decât că multe fiinţe multicelulare au iniţial embrionul lipsit de simetrie bilaterală. Forţa motrice care determină modificarea „planului original” pe măsura creşterii embrionului pare să fie într-adevăr capacitatea de mişcare.

Nu întreaga natură însufleţită trăieşte sub semnul vitezei. Formele de viaţă ancorate într-un anumit loc şi incapabile să se mişte în mod voluntar, cum sunt plantele şi celenteratele fixate pe stânci, au zonele inferioare foarte diferite de cele superioare, dar nu şi spate diferit de faţă sau o porţiune stângă diferită de cea dreaptă. Ele au o simetrie asemănătoare cu cea unui con – produc reflexii simetrice în orice oglindă poziţionată pe axa lor verticală, centrală. Anumite fiinţe care se mişcă foarte încet, cum este meduza, au o simetrie asemănătoare.

Evident, odată ce s-a dezvoltat simetria bilaterală în structura organismelor vii, existau toate motivele ca fiinţele s-o păstreze intactă. Orice pierdere a unei urechi sau a unui ochi l-ar face pe un animal mult mai vulnerabil faţă de un prădător ce se strecoară pentru a-l ataca pe neobservate.

Ne-am putea întreba oricând dacă înfăţişarea obişnuită cu care natura i-a înzestrat pe oameni este cea optimă. Ianus, de pildă, era zeul roman al porţilor şi noilor începuturi, inclusiv al primei luni (ianuarie) a anului. De aceea, el este totdeauna reprezentat în artă cu două feţe, una ce priveşte înainte (în mod simbolic, spre anul următor), alta în spatele capului (privind spre anul care a trecut). Un asemenea aranjament la oameni, deşi util pentru anumite scopuri, n-ar fi lăsat loc părţilor din creier responsabile cu sistemele nesenzoriale. În minunata sa carte *Noul Univers Ambidextru,* Martin Gardner povesteşte despre un umorist din Chicago11 care obişnuia să discute despre avantajele de a avea diverse organe senzoriale în cele mai neobişnuite locuri ale corpului. Urechile la subsuori, de pildă, ar fi ţinute la cald în iernile reci din Chicago. Dar evident, o asemenea alcătuire organică ar avea şi dezavantaje. Auzul urechilor de la subsuori ar fi serios diminuat dacă braţele n-ar fi ţinute tot timpul ridicate.

Filmele SF prezintă invariabil extratereştri care sunt bilateral simetrici. Dacă există creaturi extraterestre inteligente care au evoluat biologic, cât de mare e

probabilitatea ca ele să posede simetrie de reflecţie? Destul de mare. Dată fiind universalitatea legilor fizicii, în particular a legilor gravitaţiei şi mişcării, formele de viaţă de pe planetele din afara Sistemului Solar sunt confruntate cu aceleaşi provocări ambientale ca şi viaţa de pe Pământ. Şi acolo, forţa gravitaţională reţine orice lucru pe suprafaţa planetei şi creează o diferenţiere clară între sus şi jos. Locomoţia deosebeşte şi ea partea frontală de cea dorsală. E.T. este sau era cel mai probabil ambidextru. Aceasta nu înseamnă însă că orice delegaţie de extratereştri care ne vizitează ar trebui să ne semene. Este foarte probabil ca orice civilizaţie suficient de evoluată pentru a se angaja în călătorii interstelare să fi ajuns de mult la nivelul unei specii inteligente, cu creaturi ultratehnologizate. O superinteligenţă computerizată12 este cel mai probabil să fie de dimensiuni microscopice.

Unele dintre majusculele alfabetului fac parte dintre numeroasele creaţii umane simetrice la reflexia în oglindă. Dacă ţineţi în faţa unei oglinzi o foaie de hârtie cu literele A, A, H, I, I, M, O, T, U, V, W, X, Y, imaginea lor reflectată arată la fel. Cuvinte (sau chiar fraze întregi) construite cu aceste litere tipărite pe verticală, precum ar fi anunţul:

T
I
M
O
T
H
Y
M
A
V
0
1
M
U
T
A

rămân neschimbate la o reflexie în oglindă. Grupul suedez de muzică pop ABBA, a cărui muzică a inspirat *musical-ul* de succes *Mamma Mia,* a introdus în scrierea numelui său un truc care-l face simetric în oglindă (MAMMA MIA, scris pe verticală, este de asemenea simetric în oglindă). Unele litere, precum B, C, D, E, H, I, K, O, X, sunt simetrice la reflexia într-o oglindă care le secţionează orizontal. Cuvintele compuse din aceste litere, cum sunt DOC, BOX, CODEX, sau simbolul familiar pentru îmbrăţişări şi săruturi, XOXO, rămân neschimbate dacă sunt reflectate într-o astfel de oglindă.

Importanţa simetriei de reflexie pentru percepţia şi aprecierea noastră estetică, pentru teoria matematică a simetriilor, pentru legile fizicii şi pentru ştiinţă în genere nu poate fi supraestimată. Voi reveni de mai multe ori asupra ei, însă există şi alte simetrii, la fel de relevante.

Structura poznaşă a zăpezii

Titlul acestui subcapitol este preluat dintr-o creaţie a poetului şi eseistului american Ralph Waldo Emerson (1803 – 1882): „The snowstorm”.13 El exprimă uimirea pe care-o simţim în faţa formelor impresionante ale fulgilor de zăpadă (figura 4). Deşi vorba „doi fulgi de zăpadă nu sunt niciodată la fel” nu este în fapt adevărată dacă-i privim cu ochiul liber, fulgii de zăpadă formaţi în ambienturi diferite sunt efectiv diferiţi între ei. Faimosul astronom Johannes Kepler14 (1571 – 1630), descoperitorul legilor mişcării planetare, a fost atât de impresionat de splendoarea acestora, încât a dedicat un întreg tratat, *Fulgul de zăpadă cu şase colţuri,* încercării de a explica simetria lor. Pe lângă simetria de reflexie, fulgii de zăpadă posedă o *simetrie de rotaţie*15 – pot fi rotiţi cu anumite unghiuri în jurul unei axe perpendiculare pe planul lor (trecând prin centru) şi rămân la fel. Datorită proprietăţilor şi formei moleculei de apă, fulgii de zăpadă au de regulă şase colţuri (aproape) identice. Ca urmare, cel mai mic unghi de rotaţie (diferit de zero) pentru care configuraţia rămâne neschimbată se obţine prin deplasarea fiecărui colţ cu un „pas”: 360°/6 = 60°. Celelalte unghiuri care conduc la

obţinerea aceleiaşi figuri finale sunt pur şi simplu multipli ai acestui unghi: 120°, 180°, 240°, 300°, 360° (cel din urmă readuce fulgul în poziţia iniţială şi este echivalent cu nerotirea lui). Fulgii de zăpadă au deci o hexasimetrie de rotaţie. Prin comparaţie, stelele-de-mare au o pentasimetrie de rotaţie; ele pot fi rotite cu 72°, 144°, 216°, 288° şi 360° fără a rezulta vreo deosebire sesizabilă. Multe flori, precum crizantema, margareta şi floarea-soarelui prezintă o simetrie de rotaţie aproximativă. Ele arată practic la fel cu orice unghi ar fi rotite (figura 5). Simetria, combinată cu bogăţia culorilor şi mirosurile ameţitoare, este o proprietate subiacentă care le dă florilor puterea lor universală de fascinaţie. Nimeni n-a exprimat poate mai bine raportul asociativ dintre flori şi opere de artă decât pictorul James McNeill Whistler16 (1834 – 1903):

Capodopera ar trebui să-i pară pictorului precum o floare – perfectă şi în stadiul de îmbobocire, şi în cel de înflorire; fără nicio raţiune care să-i explice existenţa, fără nicio misiune de îndeplinit; o bucurie pentru artist, o dezamăgire pentru filantrop, o enigmă pentru botanist; un accident al sentimentului şi o aliteraţie pentru literat.

Ce anume are în el un model simetric pentru a putea provoca o asemenea reacţie emoţională? O fi această reacţie pe măsura celei produse de operele de artă? De observat că, chiar dacă răspunsul la ultima întrebare este un „da” fără echivoc, acesta nu ne apropie cu nimic de răspunsul la cea dintâi. Răspunsul la întrebarea „Ce au operele de artă de provoacă o reacţie emoţională?” este departe de a fi clar. Într-adevăr, care e calitatea pe care-o împărtăşesc capodopere atât de diferite precum *Fata cu cercel de perlă* a lui Jan Vermeer, *Guernica* lui Pablo Picasso şi *Diptic cu Marilyn* al lui Andy Warhol? Clive Bell17 (1881 – 1964), critic de artă şi membru al Grupului de la Bloomsbury (care, fiindcă veni vorba, o includea şi pe romanciera Virginia Woolf), a sugerat că această calitate, comună tuturor adevăratelor opere de artă, ar fi „forma semnificativă”. Prin asta, el înţelegea o combinaţie

particulară de linii, culori, forme şi proporţii care ne stârnesc emoţiile. Dar de aici nu rezultă că toate operele artă stârnesc aceeaşi emoţie. Dimpotrivă: fiecare poate stârni o emoţie complet diferită. Trăsătura lor comună constă în faptul că oricare dintre ele ne impresionează într-un fel sau altul. Dacă ar fi să admitem teoriile esteticii, atunci simetria ar putea reprezenta una dintre componentele (destul de vag definite) ale formei semnificative. În acest caz, reacţia noastră la modelele simetrice s-ar putea să se integreze (chiar dacă este, poate, mai puţin intensă) în sensibilitatea noastră estetică generală. Nu toţi sunt de acord cu această afirmaţie. Teoreticianul estetician Harold Osborne18 spunea următoarele despre reacţia umană la simetria unor elemente sau obiecte individuale, cum ar fi fulgii de zăpadă: „Ele pot trezi interes, curiozitate şi admiraţie. Dar interesul vizual faţă de ele are o viaţă scurtă şi este unul superficial: comparativ cu impactul unei capodopere artistice, atenţia perceptivă slăbeşte curând, nu ajunge niciodată în profunzime.

Capacitatea de percepţie nu este mărită". În fapt, aşa cum voi arăta în capitolul următor şi în capitolul 8, simetria are legătură strânsă cu percepţia. Pentru moment, hai să ne concentrăm asupra „valorii" pur estetice a simetriei.

Psihologii Peter G. Szilágyi şi John C. Baird 19 de la Dartmouth College au făcut în 1977 un experiment fascinant menit să analizeze raportul cantitativ dintre simetriile incluse într-o configuraţie şi preferinţele estetice. Douăzeci de studenţi din primii ani de studiu (subiecţii cei mai obişnuiţi ai experimentelor psihologice) au fost supuşi la trei teste simple. Cel dintâi le cerea să aranjeze opt pătrate cu câte un punct negru în centrul lor pe o riglă formată din optsprezece celule, fiecare de mărime egală cu cea a pătratelor (figura ba). Subiecţii au fost instruiţi să aranjeze piesele într-o manieră care să li se pară „vizual plăcută". Fiecare pătrat trebuia să acopere în întregime o celulă, şi trebuiau folosite toate pătratele. Al

doilea şi al treilea test erau similare. Al doilea le cerea să aranjeze unsprezece piese pe o tablă de 5 X 5 celule (figura bb). În cazul celui de-al treilea, douăsprezece cuburi trebuiau potrivite în adâncimile unei structuri transparente tridimensionale, constând din trei suprafeţe plane orizontale, fiecare având câte nouă adâncituri pătrate (figura be). Rezultatele au arătat o clară preferinţă estetică pentru configuraţii simetrice. De exemplu, 65 la sută dintre subiecţi au obţinut la primul test simetrii de reflexie perfecte. În fapt, simetria a fost criteriul de bază în lucrările celor mai mulţi studenţi (în una, două şi trei dimensiuni), simetria perfectă fiind condiţia cea mai căutată.

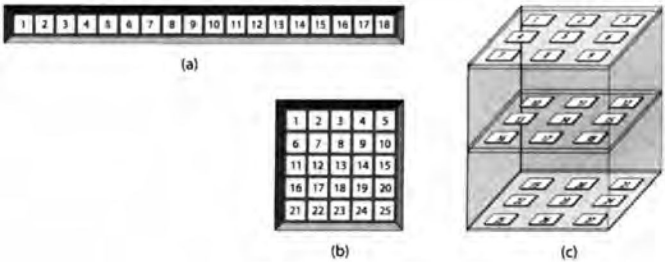


Figura 6 (a), (b), (c)

Asocierea dintre simetrie şi gustul artistic nu s-a făcut numai în experimente, ci a apărut şi într-o teorie estetică mai speculativă, dezvoltată de faimosul matematician George David Birkhoff20 (1884 – 1944) de la Harvard. Birkhoff este cunoscut în special pentru faptul de a fi demonstrat în 1913 o faimoasă conjectură geometrică formulată de matematicianul francez Henri Poincaré şi pentru teorema lui ergodică (publicată în 1931 – 32) – o contribuţie de importanţă fundamentală pentru teoriile gazelor şi probabilităţilor. Pe vremea când era student în primii ani, Birkhoff a început să-şi pună întrebări asupra structurii muzicii, iar aproximativ prin 1924 şi-a extins interesul asupra esteticii în general. O jumătate din anul 1928 şi l-a petrecut făcând o lungă călătorie prin Europa şi Orientul îndepărtat, în încercarea de a asimila cât mai multe cunoştinţe despre artă, muzică şi poezie. Eforturile

sale pentru a dezvolta o teorie matematică a valorii estetice au culminat prin publicarea, în 1933, a lucrării *Măsura Estetica*i21. Birkhoff a analizat în special percepţia intuitivă a valorii unei opere de artă, care poate fi „diferenţiată clar de percepţiile senzorială, emoţională, morală sau intelectuală”. El împarte experienţa estetică în trei faze: (1) efortul de atenţie necesar pentru percepţie; (2) realizarea faptului că obiectul este caracterizat de o anumită ordine; (3) aprecierea valorii, care recompensează efortul mintal. Birkhoff atribuie mai departe mărimi cantitative celor trei faze. Efortul preliminar, sugerează el, creste proporţional cu complexitatea operei (notată cu C). Simetriile joacă un rol-cheie în ordinea (notată O) ce caracterizează obiectul. Şi, în final, percepţia valorii este ceea ce Birkhoff numeşte „măsura estetică” (notată M) a operei de artă.

Esenţa teoriei lui Birkhoff poate fi rezumată astfel: în interiorul fiecărei clase de elemente estetice, precum ornamentele, vasele, ariile muzicale sau poezia, se poate defini o ordine *O* °i o complexitate C. Măsura estetică a fiecărui element al clasei poate fi calculată prin simpla împărţire a lui *o* la C. Cu alte cuvinte, Birkhoff a propus o formulă pentru percepţia valorii estetice: *M = O*: C. Sensul acestei formule este următorul: pentru un anumit grad de complexitate, măsura estetică este cu atât mai mare cu cât este mai mare ordinea din cadrul elementului. Sau dacă ordinea este specificată, măsura estetică este cu atât mai mare cu cât elementul este mai puţin complex. Dat fiind că pentru majoritatea scopurilor practice ordinea este determinată în primul rând de simetriile elementului, teoria lui Birkhoff proclamă simetria drept un element estetic crucial.

Birkhoff a fost primul care a admis că definiţiile precise ale mărimilor sale O, *C* şi *M* erau pline de capcane. Cu toate acestea, el a făcut curajoasa încercare de a descoperi legi detaliate pentru calculul lor, în cazul mai multor forme de artă. Mai exact, a început cu forme geometrice simple ca cele din figura 7, a continuat cu

ornamente şi vase chinezeşti, a ajuns la armoniile din gama diatonică şi a încheiat cu creaţiile lirice ale lui Tennyson, Shakespeare şi Amy Lowell.

Nimeni, şi Birkhoff mai puţin decât oricine, n-ar afirma că meandrele plăcerii estetice ar putea fi complet reduse la o simplă formulă. Cu toate acestea, Birkhoff a spus că: „În inevitabilul acompaniament analitic al procesului creator, teoria măsurii estetice este capabilă să aducă un dublu serviciu: ea furnizează o dare de seamă simplă şi unificată asupra experienţei estetice şi asigură mijloace pentru analiza sistematică a unor domenii artistice reprezentative”.

Întorcându-ne acum, după acest scurt ocol pe tărâmul esteticii, la cazul simetriei de rotaţie, observăm că una dintre cele mai simple figuri plane rotaţional simetrice este cercul (figura 8 a). Dacă-l rotiţi în jurul centrului cu, să spunem 37°, el rămâne neschimbat. De fapt, îl puteţi roti cu *orice* unghi în jurul unei axe perpendiculare ce trece prin centrul lui, fără să observaţi vreo diferenţă. Cercul are, de aceea, o infinitate de simetrii de rotaţie. Dar acestea nu sunt singurele simetrii ale cercului. El rămâne neschimbat şi la orice reflexie faţă de o axă trasată de-a lungul unui diametru (figura 8 b).

Acelaşi sistem poate avea deci mai multe tipuri de simetrii, sau poate fi simetric atunci când este supus unei varietăţi de *transformări de simetrie.* Rotaţia unei sfere perfecte în jurul centrului ei, indiferent care ar fi direcţia axei luate în considerare, o face să arate exact la fel. Sau priviţi de pildă triunghiul echilateral (cu toate laturile egale) din figura 9 a.

Nu avem voie nici să schimbăm forma sau mărimea acestui triunghi, nici să-l translatăm. Ce transformări i-am putea aplica pentru a-l lăsa neschimbat? L-am putea roti cu 120°, 240° sau 360° în jurul unei axe perpendiculare pe planul figurii, ce trece prin punctul *O* (figura 9 b). Aceste transformări schimbă între ele locaţiile vârfurilor, dar dacă staţi cu spatele în vreme ce cineva îi aplică astfel de rotaţii, nu veţi observa nicio diferenţă. De notat că o

rotaţie de 360° este echivalentă cu a nu face nimic, sau cu a-l roti cu zero grade. Aceasta e cunoscută sub denumirea de *transformare identică.* De ce ne mai complicăm cu definirea unei astfel de transformări? Aşa cum vom vedea mai departe în carte, transformarea identică joacă un rol similar cu cel al numărului zero în operaţia aritmetică de adunare sau cu cel al numărului unu la înmulţire – atunci când adăugaţi zero la un număr sau înmulţiţi un număr cu unu, numărul rămâne neschimbat. Putem, de asemenea, reflecta în oglindă triunghiul în raport cu dreptele punctate din figura 9 c. Există aşadar exact şase transformări de simetrie – trei rotaţii şi trei reflexii – asociate triunghiului echilateral.

Dar ce putem spune despre combinaţiile unor asemenea transformări, cum ar fi o reflexie urmată de o rotaţie? N-or duce ele la creşterea numărului simetriilor triunghiului? Voi reveni la această întrebare când vom discuta despre limbajul simetriilor. Pentru moment însă, avem de expus o altă simetrie importantă.

Morris, Mozart şi compania

Unul dintre cele mai obişnuite modele simetrice este motivul repetat, recurent. De la frizele templelor clasice şi coloanele palatelor, până la covoare şi chiar la cântecul păsărilor, simetria motivelor repetate a produs dintotdeauna o foarte reconfortantă senzaţie de familiaritate şi un efect liniştitor. Un exemplu elementar de simetrie de acest tip a fost prezentat în figura 3.

Transformarea de simetrie din acest caz se numeşte *translaţie,* ea însemnând o deplasare sau mutare cu o anumită distanţă de-a lungul unei anumite drepte. Modelul este simetric dacă poate fi deplasat în diverse direcţii fără a-şi schimba aspectul. Cu alte cuvinte, configuraţiile regulate obţinute prin repetarea la intervale fixe a aceluiaşi motiv posedă o simetrie de translaţie. Încă din anul 17.000 î.Hr. (era paleolitică) au fost create ornamente simetrice, obţinute prin translaţii. O brăţară din fildeş de mamut22 găsită în Ucraina are un model care se repetă în zigzag. Alte configuraţii cu simetrie de translaţie se

întâlnesc în diverse forme de artă, pornind de la mozaicul islamic medieval al palatului Alhambra din Granada, Spania (figura 10 a), trecând prin tipografia Renaşterii şi ajungând la desenele fantasticului grafician23 olandez M.C. Esher (1898 – 1972; figura 10 b). Natura furnizează şi ea exemple de creaturi cu simetrie de translaţie, cum sunt miriapozii, la care segmente identice ale corpului se pot repeta de până la 170 de ori.

Artistul, poetul şi scriitorul victorian William Morris24 (1834 – 1896) a fost un prolific producător de artă decorativă. O mare parte din opera lui este literalmente o întrupare a simetriei de translaţie. De timpuriu, Morris a fost fascinat de arhitectura medievală, iar la 27 de ani a înfiinţat o firmă de

a

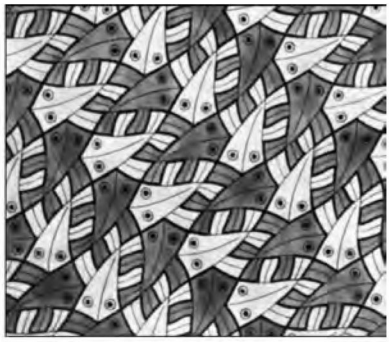
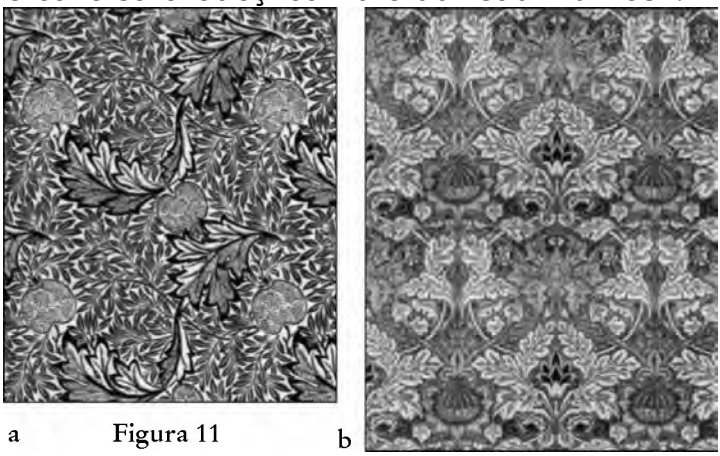


Figura 10 b

decoraţiuni care a devenit faimoasă mai târziu, sub numele de Morris and Company. Ca o reacţie la tot mai puternica industrializare a Angliei secolului al XIX-lea, Morris căuta căi de resuscitare a artizanatului artistic şi de revitalizare a splendorii artelor decorative ale Evului Mediu. Morris and Company, iar mai târziu Kelmscott Press fondată de Morris în 1890, au creat uluitoare mozaicuri, servicii de masă şi materiale textile, preocupându-se totodată şi de ornarea cu desene medievale a manuscriselor. Dar conceperea designului

tapetelor a fost domeniul în care Morris şi-a atins mai întâi incredibila măiestrie în realizarea de modele repetate cu simetrie de translaţie. Două dintre impresionantele sale motive sunt prezentate în figura 11. Chiar dacă producţiile lui n-au fost poate cu nimic mai inovatoare decât cele ale unora dintre contemporanii săi, precum Christopher Dresser sau A.W.N. Pugin, influenţa şi moştenirea lăsate de Morris au fost enorme. El era interesat de promovarea artei şi a artizanatului, nu de matematica simetriei. În *Frumuseţea vieţii*25, şi-a rezumat astfel filosofia socio-estetică:

Puteţi atârna tapiserii pe pereţi, în loc să-i văruiţi sau să-i acoperiţi cu hârtie; ori le puteţi aplica un mozaic; ori puneţi-l pe un mare pictor să vă realizeze nişte fresce: toate acestea nu înseamnă lux dacă sunt făcute de dragul frumuseţii, şi nu pentru paradă. Ele nu încalcă regula noastră de aur: „Să nu aveţi în casele voastre niciun lucru despre care să credeţi că nu e util sau frumos”.



a Figura 11 b

O întrebare interesantă este dacă simetria de translaţie, ca şi cele de reflexie şi rotaţie sunt limitate la artele vizuale sau se pot manifesta şi în alte forme de artă, cum ar fi muzica. Evident, dacă ne referim la sunete, nu la aspectul partiturii, ar trebui să definim simetriile în termeni diferiţi de cei pur geometrici, aşa cum am făcut şi în cazul palindromurilor. Dar odată ce am făcut acest

lucru, răspunsul la întrebarea „Putem găsi simetrie de translaţie în muzică26?” este un răsunător „Da”. Aşa cum scria în 1908 cristalograful rus G.V. Wulff27: „Spiritul muzicii este ritmul. El constă în repetarea periodică, regulată a unor părţi din compoziţia muzicală… Repetarea regulată a unor părţi identice ale întregului constituie esenţa simetriei”. Efectiv, temele recurente atât de comune în compoziţia muzicală sunt echivalentele temporale ale imprimeurilor lui Morris şi ale simetriei de translaţie. Mai general, compoziţiile sunt deseori bazate pe un motiv fundamental introdus la început, care ulterior suportă diverse transformări.

Printre exemplele muzicale simple de simetrie de translaţie se numără măsurile iniţiale din faimoasa Simfonie nr. 40 în sol

Figura 12

minor de Mozart (figura 12), ca şi întreaga structură a compoziţiilor realizate în unele dintre stilurile muzicale uzuale. În primul exemplu puteţi vedea simetria de translaţie nu numai pe fiecare rând al partiturii (unde sunt marcate scurtele gesturi de coborâre), ci şi între primul rând şi cel de-al doilea (notate cu *a* şi b). Pentru a descrie în termeni generali o piesă muzicală, cum ar fi un rondo, folosind simbolurile A, B şi C pentru temele din care este compus, obţinem un tipar ce poate fi exprimat sub forma ABACA sau ABACABA. Astfel, simetria de translaţie devine vizibilă. Asocierea lui Mozart cu simboluri matematice28 n-ar trebui să surprindă. Sora lui, Nannerl, îşi amintea că el umpluse cândva cu numere pereţii casei scărilor şi ai

tuturor încăperilor locuinţei, şi când nu mai rămăsese niciun loc, se mutase pe pereţii unei case vecine. Chiar şi marginile manuscriselor mozartiene ale Fanteziei şi Fugii în do major conţin calcule ale probabilităţii de a câştiga la loterie. Nu-i de mirare atunci că muzicologul şi compozitorul britanic Donald Tovey a identificat „proporţiile simetrice şi frumoase" ale compoziţiilor lui Mozart drept unul dintre motivele-cheie ale popularităţii lor.

Un alt mare compozitor despre care se ştie că a fost obsedat de numere, jocuri mintale şi modalităţile lor de utilizare în piese muzicale complexe este Johann Sebastián Bach29 (1685 – 1750). Atât reflexia, cât şi translaţia apar frecvent în muzica sa, la diverse niveluri. Un exemplu de reflexie în „oglindă" orizontală este dat de deschiderea Sonatei nr. 6 în mi major (vezi figura 13).

Închipuiţi-vă o oglindă pusă în spaţiul dintre cele două rânduri de partitură. Tendinţa ascendentă marcată de liniaa este reflectată (o jumătate de măsură mai târziu) de tendinţa descendentă b, toată secvenţa fiind apoi repetată şi reflectată din nou (începând din d). Un alt exemplu este dat de întreaga structură a uneia dintre cele mai remarcabile lucrări ale lui Bach, faimoasa *Ofranda muzicală.* Compoziţia este formată din următoarele episoade:

Ricercar 5 Canoane Sonată pentru trei instrumente
5 Canoane Ricercar

Ea prezintă o simetrie de reflexie (evident, nu sunet cu sunet).

Ricercar (de la *ricercare* – „a căuta") era un vechi termen folosit în sens larg pentru orice tip de preludiu, de obicei în stil rugat-o. Remarcabilul umanist, medic şi filosof Albert Schweitzer (1875 – 1965) a fost şi el un mare admirator al lui Bach. În cartea sa*J.S. Bach,* el scrie: „Cuvântul [ricercar] se referă la o bucată muzicală în care noi avem de căutat ceva – o anumită temă". *Ofranda muzicală* mai conţine zece canoane care, prin construcţie, implică operaţia de translaţie. În orice canon (cuvântul

înseamnă „regulă”), un fir melodic determină regula (formulată în termeni de linie melodică sau de ritm) pentru vocea a doua sau următoarele. Vocea a doua urmează la un anumit interval de timp, prestabilit – se face o *translaţie temporală.* Un exemplu simplu şi familiar este dat de cântecelul:

Merge, merge, merge barca.
Lin în josul râului.
Vesel, vesel, vesel, vesel.
Viaţa-i doar un vis, în care vocea a doua intră acolo unde prima ajunge la cuvântul „lin”.

Şi povestea creării *Ofrandei muzicale* este fascinantă. Cu trei ani înainte de a muri, Bach se afla în drum spre Berlin pentru a o vizita pe nora sa Johanna Maria Dannemann (soţia compozitorului Carl Philipp Emanuel Bach), care la vremea aceea era însărcinată. Epuizat de lunga călătorie, vârstnicul

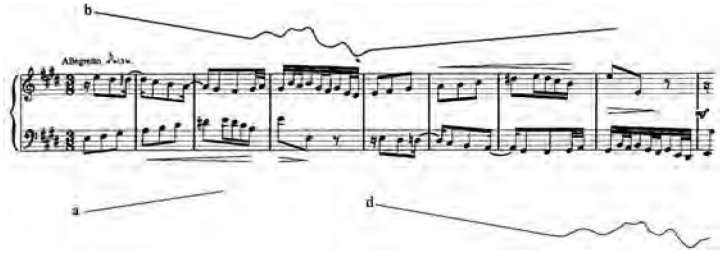


Figura 13

compozitor a făcut o oprire la Potsdam, pe atunci reşedinţa regelui Frederic cel Mare al Prusiei, în slujba căruia se afla şi Carl Philipp Emanuel. Vestea sosirii lui Bach la palat l-a determinat pe rege să suspende un concert de seară, în care el însuşi ar fi trebuit să se producă la flaut, în favoarea unor recitaluri improvizate pe muzică de Bach, susţinute cu şapte noi instrumente de tip pianoforte. Gottfried Silbermann, meşterul constructor de orgi al barocului german, realizase acele instrumente. După nişte performanţe de mare virtuozitate avute în şapte încăperi diferite ale palatului, Bach i-a propus audienţei încântate să improvizeze o fugă pe o temă

sugerată de Înălţimea Sa Regală. Întors acasă, el a compus *Ofranda muzicală* pe baza acestei fugi improvizate. I-a adăugat câteva canoane de o superbă complexitate şi o sonată pentru trei instrumente, apoi s-a preocupat de celelalte ritmuri, polifonice. Sonata trebuia interpretată cu un flaut (instrumentul regelui Frederic), o vioară şi un bas (clavecin şi violoncel). Drept titlu al *Ofrandei,* Bach, ca de obicei inventiv în materie de jocuri de cuvinte, a ales *Regis iussu cantio et reliqua canonica arte resoluta (După porunca regelui, tema şi adaosurile rezolvate în stil canonic),* formând acronimul RICERCAR.

Ofranda muzicală conţine, de fapt, mai multe simetrii. În Canonul I *(Canonul Crabului),* fiecare vioară cântă bucata muzicală a celeilalte, dar de la sfârşit spre început, rezultatul fiind o simetrie de reflexie (a partiturii) într-o oglindă verticală. În sfârşit, canoanele în general au fost considerate în acea vreme drept un fel de enigme ale simetriei. Compozitorul furniza tema, dar rămânea în sarcina muzicienilor să determine tipul de simetrie la care se gândise el să-i fie aplicat temei. În cazul *Ofrandei muzicale* a lui Bach, ultimele două canoane de dinaintea sonatei erau însoţite de indicaţia *„Quaerendo inventis”,* însemnând „Căutaţi şi veţi găsi”. Aşa cum vom vedea în capitolul 7, lucrul acesta nu diferă prea mult din punct de vedere conceptual de enigma pe care ne-o pune universul – el stă în întreaga-i glorie, deschis pentru a fi cercetat –, cerându-ne să-i găsim modelele şi simetriile subiacente. Chiar şi incertitudinile şi ambiguităţile implicate de încercările de a descoperi „Teoria a tot ce există” îşi pot găsi o analogie în provocarea intelectuală a lui Bach. Veţi vedea, unul dintre canoanele *Ofrandei muzicale* are trei soluţii posibile.

Translaţia şi reflexia pot fi combinate într-un singur gen de simetrie, cunoscut sub denumirea de *reflexie cu translaţie*30. Urmele de tălpi lăsate de picioare ca urmare a mişcării lor alternative stângul-dreptul-stângul-dreptul prezintă o simetrie de reflexie cu translaţie (figura 14). Aceasta se obţine pur şi simplu printr-o translaţie (glisare),

urmată de o reflexie faţă de o linie paralelă cu direcţia deplasării (linia punctată din figură). Echivalent, o asemenea simetrie poate fi privită ca o reflexie în oglindă, urmată de o translaţie paralelă cu oglinda. Simetria de reflexie cu translaţie apare frecvent în frizele clasice, precum şi în ceramica nativilor americani din New Mexico. În vreme ce modelele cu simetrii de translaţie tind să transmită o impresie de mişcare într-o anumită direcţie, cele cu simetrii de reflexie cu translaţie creează o senzaţie de şerpuire. Şerpii adevăraţi creează astfel de senzaţii vizuale contractând şi relaxând alternativ grupuri de muşchi de pe ambele părţi ale corpului lor – atunci când îşi contractă un grup de pe dreapta, grupul corespunzător de pe stânga este relaxat, şi viceversa.

cr3 (= 3 cr3 cr3
C? c30 c3
Figura 14

Am întâlnit până acum toate transformările rigide din care rezultă simetrii bidimensionale. Cuvântul *rigid* spune că după transformare orice două puncte păstrează între ele aceeaşi distanţă pe care au avut-o la început – figurile nu pot fi micşorate, dilatate sau deformate.

În spaţiul tridimensional, pe lângă simetriile de translaţie, rotaţie, reflexie şi reflexie cu translaţie, mai putem găsi o simetrie, cunoscută sub denumirea de *simetrie elicoidală.* Acesta este tipul de simetrie al unui tirbuşon, la care rotaţia în jurul axei este combinată cu mişcarea de translaţie de-a lungul ei. Anumite tije de plantă, pe care frunzele apar la intervale regulate după efectuarea unei rotaţii cu aceeaşi fracţiune de unghi în jurul tijei, posedă această simetrie. Sunt oare acestea toate simetriile existente? Categoric nu.

Toţi sunt egali, dar...

Artele şi ştiinţele sunt arhipline de exemple fascinante de simetrii de translaţie, rotaţie, reflexie şi reflexie cu translaţie, iar asupra unora din ele vom reveni în capitolele următoare. O interesantă transformare de natură negeometrică este cea care implică *permutări* –

diverse rearanjări de obiecte, numere sau concepte. De pildă, pentru a testa uzura a patru mărci diferite de anvelopă, le puteţi schimba lunar poziţiile, timp de patru luni, aşa încât fiecare anvelopă să ajungă pe rând într-una dintre cele patru poziţii posibile. Dacă notaţi mărcile cu A, B, C, D, iar poziţiile cu FS (faţă stânga), FD (faţă dreapta), SS (spate stânga) şi SD (spate dreapta), atunci planul pe patru luni ar putea arăta în genul următor:

LUNA	FS	FD	SS	SD
Prima	A	B	C	D
doua	B	A	D	C
treia	C	D	A	B
patra	D	C	B	A

Fiecare linie sau coloană reprezintă o permutare a literelor A, B, C, D. De notat că, pentru a efectua testarea dorită, niciuna dintre linii sau coloane nu trebuie să conţină aceeaşi literă de două ori. Acest gen de pătrate, de tip 4 X 4, sunt cunoscute sub denumirea de *Pătrate latine*31, şi ele au fost studiate intens de către matematicianul elveţian Leonhard Euler (1707 – 1783). Ca o paranteză, v-aţi putea simţi atraşi să rezolvaţi următoarea problemă, foarte populară în secolul al XVIII-lea: Aranjaţi într-un pătrat toţi valeţii, popii, damele şi asii dintr-un pachet de cărţi de joc, în aşa fel încât nicio culoare sau valoare să nu apară de două ori pe o linie, coloană sau pe una dintre cele două diagonale. În caz că aveţi dificultăţi cu această ghicitoare barocă, vă dau o soluţie în Anexa 1.

Permutările apar în circumstanţe extrem de diverse32, cum ar fi schimbul partenerilor în dansul popular scoţian şi amestecul pachetelor de cărţi de joc. În

operaţia de permutare, nu contează locul fiecărui obiect în parte, ci care este obiectul care îl va înlocui. De exemplu, în permutarea 1 2 3 4 4 1 3 2, numărul 1 a fost înlocuit de 4, 2 de 1, 3 a rămas pe loc, iar 4 a fost înlocuit de 2. Aceasta se notează de obicei prin:

1234!
4132/

unde fiecare număr de pe prima linie este înlocuit de numărul aflat sub el. Aceeaşi operaţie de permutare ar fi putut fi scrisă şi sub forma:

3214
3142/

deoarece aici au loc exact aceleaşi înlocuiri, ordinea în care sunt scrise numerele neavând importanţă. Vă puteţi pune întrebarea cum poate rămâne un sistem simetric (adică neschimbat) după o permutare? Evident, dacă pe un raft aveţi zece cărţi diferite, orice permutare diferită de cea identică (ce presupune lăsarea lor în aceleaşi poziţii) le va schimba ordinea. Dar dacă aveţi trei exemplare ale aceleiaşi cărţi, e clar că anumite permutări vor lăsa ordinea neschimbată. Eseistul şi criticul englez Charles

Lamb33 (1775 – 1834), cunoscut pentru observaţiile asupra vieţii făcute prin prisma propriei experienţe, avea o opinie destul de clară asupra unor asemenea „rearanjări". El scrie: „Specia umană, conform cu cea mai bună teorie pe care o pot formula, se compune din două rase distincte, oamenii care care iau şi oamenii care dau... Cei care iau cu împrumut cărţi sunt mutilatorii de colecţii, distrugătorii simetriei rafturilor, creatorii de volume disparate".

Simetria de permutare poate apărea în circumstanţe ceva mai abstracte. Consideraţi componentele propoziţiei „Robin este văr cu David". Sensul va rămâne acelaşi dacă-l schimbăm pe *David* cu *Robin.* Lucru care nu e adevărat pentru propoziţia „Robin este fiul lui David". Similar, egalitatea între două cantităţi, $a = b$ este simetrică la transpoziţia lui *a* cu b, dat fiind că $b = a$ reprezintă aceeaşi relaţie între cele două constante. Chiar dacă poate părea

trivial, relaţia „mai mare decât” (notată de obicei prin simbolul >) nu are această proprietate. Relaţia *a b* înseamnă „a este mai mare decât b”. Permutând literele, obţinem *b a,* adică „b este mai mare decât a”, cele două afirmaţii excluzându-se reciproc.

Diverse alte formule matematice pot prezenta, de asemenea, simetrie de permutare. Valoarea expresiei *ab + be + ca* (unde *ab* înseamnă *„a* înmulţit cu b’s.a.m.d.) rămâne neschimbată după orice permutare a literelor *a, b, c.* Aşa cum voi arăta mai detaliat ulterior, există exact şase permutări posibile ale celor trei litere, inclusiv una (prima de mai jos) care reprezintă transformarea identică, fiecare literă fiind aşezată peste ea însăşi:

tabe| jabe| tabe| labe|labe| iabe| |abci|acbl|beaj|cabi| chaj |baci

Vă puteţi convinge cu uşurinţă că expresia de mai sus nu este alterată de aceste permutări. De exemplu, cea de a treia permutare îl schimbă pe *a* cu b, pe *b* cu *e* şi pe *e* cu *a*. Întreaga formulă devine deci *be + ca + ab.* Rezultatul fiind acelaşi indiferent de ordinea în care înmulţim sau adunăm numerele, noua expresie este egală cu cea iniţială.

Jucătorii de ruletă34 dintr-un cazino reprezintă un caz interesant de simetrie de permutare. Ruleta este compusă dintr-un disc rotativ cu 18 şanţuri roşii, 18 negre şi două verzi. Toate şanţurile sunt numerotate, cele verzi fiind marcate de regulă cu cifrele 0 şi 00. O bilă albă este lansată pe discul rotativ şi, după câteva tururi rapide făcute la periferia acestuia, sfârşeşte prin a se opri într-unul dintre şanţuri. Atunci când discul este perfect din punct de vedere mecanic, jocul de ruletă este absolut simetric la orice permutare a jucătorilor. Pentru fiecare dintre ei există exact aceeaşi probabilitate de câştig sau de pierdere, indiferent dacă sunt jucători inveteraţi sau novici, experţi în teoria probabilităţilor sau idioţi ai satului. Perspectiva de câştig35 (sau mai degrabă de pierdere, în medie de circa 5, 3 centi per dolar pariat) nu depinde de suma pusă în joc ori de strategia jucătorului. Deşi nu poate exista o roată mecanică perfectă, secolele de profituri ale

cazinourilor dovedesc că, orice mici excepţii ar exista, ele nu conduc la o încălcare semnificativă a regulii simetriei de permutare.

Nu toate jocurile de noroc prezintă simetrie de permutare. *Blackjack* este un joc de cărţi care presupune ca fiecare jucător de la masă să joace împotriva dealerului. Cărţile numerotate au valorile înscrise pe ele, cărţile cu figuri valorează, toate, câte zece puncte, iar asul oferă opţiunea de a fi considerat egal cu unu sau unsprezece. Obiectivul este acela de a achiziţiona cărţi cu valoare însumată mai apropiată de 21 decât cele din mâna dealerului, fără a depăşi însă limita celor 21 de puncte. Jocul este asimetric la permutarea jucătorilor tocmai din cauza faptului că strategia contează. Prin anii 1960, cazinourile au descoperit importanţa strategiei într-o manieră destul de dură. Matematicianul Edward O. Thorp a arătat că modul în care ele calculau probabilităţile atunci când pachetul de cărţi începea să se termine avea o hibă. El a folosit această informaţie pentru a dezvolta o metodă de joc extrem de profitabilă. Dacă sunteţi curioşi, cazinourile au luat de atunci măsuri de corecţie. Cu toate acestea, rămâne adevărat că strategia contează la *Blackjack.* Într-adevăr, şase studenţi de la MIT care comunicau prin cuvinte codificate au câştigat milioane la Las Vegas în anii 1990.

Simetria de permutare şi unele dintre rubedeniile ei ştiinţifice au consecinţe până şi în fizica universului subatomic, şi vom reveni asupra unora dintre ele în capitolul 7. Aici voi da pe scurt un singur exemplu simplu, care explică o ciudăţenie a atomilor diverselor elemente – faptul că ei au aproximativ aceeaşi mărime.

Atomii seamănă oarecum cu nişte sisteme solare în miniatură. Electronii atomului se rotesc în jurul unui nucleu central, exact aşa cum planetele se învârtesc în jurul Soarelui. Forţa care menţine electronii pe orbitele lor nu este însă de natură gravitaţională, ci electromagnetică. Nucleul conţine protoni, care au sarcini electrice pozitive (şi neutroni, care sunt neutri), pe când electronii care se

rotesc în jurul lui (egali la număr cu protonii) sunt încărcaţi negativ. Sarcinile electrice opuse se atrag reciproc. Spre deosebire de sistemele planetare, care pot avea orbite de orice mărime, atomii trebuie să se supună legilor universului subatomic – *mecanicii cuantice.* Electronii se plasează, cu cea mai mare probabilitate, pe anumite orbite specifice, „cuantizate", restrânse la o serie particulară de mărimi discrete. Orbitele permise sunt caracterizate în principal de energia lor. În general vorbind, cu cât energia asociată orbitei este mai mare, cu atât mărimea ei este mai mare. Situaţia este oarecum analogă cu cea a unei scări, pe a cărei primă treaptă de jos se află nuvelul, iar următoarele, tot mai ridicate, corespund nivelurilor superioare de energie. Aici apare însă ciudăţenia. Fizica, şi viaţa cotidiană de altfel, ne învaţă că sistemele au stabilitate maximă la nivelul energetic cel mai scăzut posibil (de pildă, o minge ce se rostogoleşte pe o scară îşi atinge stabilitatea la baza ei). Aceasta ar trebui să însemne că, indiferent dacă avem de-a face cu atomul de hidrogen, care are un singur electron, cu cel de oxigen, care are opt electroni, sau cu cel de uraniu, cu nouăzeci şi doi de electroni, toţi electronii ar trebui să fie înghesuiţi pe cea mai mică orbită posibilă. Deoarece atracţia electromagnetică dintre nucleu şi electroni creste proporţional cu numărul de electroni şi protoni, ne-am aştepta ca atomul de oxigen să fie mai mic decât atomul de hidrogen, iar atomul de uraniu cu mult mai mic decât amândoi (aşa cum sunt ei reprezentaţi schematic în figura 15). Experimentele arată însă că o asemenea concluzie este departe de realitate: indiferent de numărul de electroni, se constată că atomii au aproximativ aceeaşi mărime. De ce?

Explicaţia a fost dată de faimosul fizician Wolfgang Pauli (1900 – 1958). În 1925, el a formulat o importantă lege a naturii (care în 1945 i-a adus Premiul Nobel), cunoscută sub denumirea de *Principiul excluziunii*36. Legea se referă la anumite particule elementare de acelaşi tip, cum sunt electronii. Toţi electronii din univers sunt

absolut identici din punctul de vedere al caracteristicilor intrinsece – nu există nicio cale de a-l deosebi pe unul de altul. Pe lângă masa şi sarcina lor electrică, electronii mai au o caracteristică fundamentală, numită *spin.* Pentru anumite scopuri, spinul ar putea fi calculat mai uşor dacă am considera că electronul este o sferă micuţă, ce se roteşte în jurul axei sale. Mecanica cuantică – teoria care descrie atomii, lumina şi particulele subatomice – ne spune că spinul electronului nu poate avea decât două orientări (oarecum analoge cu rotirea mingii cu o anumită viteză într-o direcţie sau în direcţia opusă). Conform Principiului excluziunii, doi electroni nu pot fi în exact aceeaşi stare; cu alte cuvinte, nu pot avea exact aceeaşi orbită şi orientare a spinului. Cum se leagă asta de simetrie? Pentru a formula mai exact Principiul excluziunii, trebuie să realizăm faptul că mecanica cuantică foloseşte limbajul probabilităţilor. Nu putem niciodată determina cu precizie locaţia unui electron în interiorul atomului, ci doar diferitele probabilităţi de a-l găsi într-o anumită poziţie. Ansamblul tuturor acestor probabilităţi e cunoscut sub denumirea de *funcţie de probabilitate.* Această funcţie joacă rolul unei hărţi, care ne arată unde găsim cel mai probabil electronul. La fel, Pauli şi-a formulat principiul în termenii unei proprietăţi a funcţiei de probabilitate, ce descrie mişcarea electronilor în atom. El a afirmat că funcţia de probabilitate este antisimetrică la inversarea oricărei perechi de electroni. Despre o astfel de funcţie se spune că este antisimetrică dacă doi electroni care se mişcă pe aceeaşi orbită şi au aceeaşi orientare vectorială a spinului schimbă doar semnul funcţiei (de exemplu, din plus în minus), nu şi valoarea ei. Să ne imaginăm bunăoară că litera *a* simbolizează valoarea unei proprietăţi a primului electron, iar litera b, valoarea aceleiaşi proprietăţi a celui de-al doilea electron. O funcţie care ia valoarea *a + b* este simetrică la permutarea celor doi electroni, dat fiind că *a + b = b + a.* Pe de altă parte, funcţia *a – b* este antisimetrică, deoarece schimbarea lui *a* cu *b* şi a lui *b* cu a fi modifică pe *a – b* în *b – a,* iar *b* – a este exact negativul lui *a – b* (de

exemplu, 5 – 3 = 2; 3 – 5 = – 2).

Afirmaţia lui Pauli reprezintă deci cheia problemei. Pe de o parte, ştim că permutarea a doi electroni identici n-ar trebui să aducă nicio modificare, iar funcţia de probabilitate ar trebui să rămână neschimbată. Pe de altă parte, Principiul excluziunii ne spune că funcţia de probabilitate ar trebui să-şi schimbe semnul (bunăoară din pozitiv în negativ) după o astfel de permutare. Ce fel de număr este cel egal cu negativul său? Nu există decât un singur astfel de număr – zero. Schimbând semnul din faţa lui zero, nu i se schimbă valoarea; minus zero este egal cu plus zero. Cu alte cuvinte, probabilitatea de a găsi doi electroni cu acelaşi spin mişcându-se pe aceeaşi orbită este egală cu zero – nu există o asemenea stare.

Principiul excluziunii ne spune că electronilor cu aceleaşi proprietăţi nu le place să fie înghesuiţi în acelaşi loc. Ca urmare, pe fiecare orbită nu pot exista mai mult de doi electroni (unul pentru fiecare orientare posibilă a spinului). În loc ca toţi electronii să se aglomereze pe cea mai mică orbită (cea cu energie minimă), ei sunt siliţi să se repartizeze pe orbite succesive, cu energii şi dimensiuni din ce în ce mai mari. Rezultatul este că, deşi mărimile orbitelor cuantizate sunt mai mici la atomii grei (cei bogaţi în protoni), electronilor nu le rămâne altceva de făcut decât să ocupe un număr sporit de orbite. În mod spectaculos, comportarea funcţiei de probabilitate la permutarea electronilor explică de ce atomii au mărimi aproape egale, nefiind în realitate ca cei reprezentaţi în figura 15.

Revenind acum la permutări în general, transformările de culoare37 pot fi considerate similare. Orice configuraţie realizată din mai mult de o singură culoare, cum este o tablă de şah, dă posibilitatea schimbării culorilor între ele. Strict vorbind, configuraţiile reale sunt de obicei nesimetrice la transformări de culoare – ele se schimbă după o astfel de transformare. Câteva dintre lucrările pline de imaginaţie ale lui M.C. Escher sunt foarte aproape de a fi simetrice (figura 16). De

observat că imaginea nu rămâne cu adevărat aceeaşi dacă negrul şi albul se schimbă între ele, după cum nicio tablă de şah nu o face. Totuşi, impresia vizuală generală rămâne aceeaşi.

Escher însuşi n-a ştiut prea bine niciodată38 ce anume l-a condus spre obsesia lui pentru modele cu simetrii de translaţie şi culoare. Cu propriile-i cuvinte.

M-am mirat deseori de mania mea de a face astfel de desene, caracterizate de o anumită periodicitate. L-am întrebat odată pe un prieten, un psiholog, asupra motivului fascinaţiei mele, dar răspunsul lui, că aş fi mânat de un instinct primar, prototipic, nu explică nimic. Cum se face că sunt singur în acest domeniu? De ce niciunul dintre confraţii mei nu pare la fel de fascinat de aceste forme întrepătrunse? Regulile lor sunt totuşi pur obiective; orice artist le poate aplica în maniera personală!

Meditaţiile retrospective ale lui Escher ating două subiecte importante: rolul simetriei în procesul „primar” al percepţiei şi regulile subiacente simetriei. Ultimul subiect va fi tema mai multor capitole ulterioare. Cum însă orice informaţie pe care o obţinem despre lume ne parvine prin intermediul simţurilor, problema simetriei ca potenţial factor al percepţiei capătă o relevanţă imediată.

2

Iitnim iihco nî cârtemia

5

D

Între toate simţurile omeneşti, văzul este de departe cel mai important mijloc de percepţie. Dar ochii nu sunt decât nişte instrumente optice; percepţia implică participarea creierului. Percepţia vizuală este un complex de procese cerebrale care combină senzaţiile primite din lumea externă pentru a produce o imagine informaţională. Mediul nostru înconjurător dă mult mai multe semnale decât putem analiza. Ca urmare, percepţia implică o cernere a mulţimii de date şi o selectare a celor mai utile. Atunci când jucătorii de şah se gândesc la următoarea mutare, ei nu examinează mintal toate mişcările posibile

de pe tablă. Se concentrează doar asupra acelor câteva mutări care par cele mai benefice în lumina stocului de informaţie acumulată – lucru pe care noi îl numim memorie. În filmul lui Woody Allen *Blestemul scorpionului de jad,* Dan Aykroyd joacă rolul şefului unei companii de asigurări. Într-o scenă, el îi spune unuia dintre investigatorii săi, C.W. Briggs (interpretat de Woody Allen), următoarele cuvinte „Ştiţi, există un cuvânt pentru oamenii care cred că toată lumea conspiră împotriva lor". La care Woody Allen răspunde: „Mda – perceptivi!" În realitate, paranoia reprezintă, fireşte, o distorsionare a percepţiei.

În aparenţă, percepţia vizuală are de îndeplinit o misiune imposibilă. Ea trebuie să transforme ciocnirea fizică a cuantelor de lumină (numite *fotoni)* de receptorii din fundul ochiului în imagini mintale ale obiectelor. Aşa cum vom vedea în curând, simetria dă un ajutor important pentru atingerea acestui scop.

În primul rând însă, trebuie să apreciem ce tipuri de dificultăţi sunt întâmpinate. Astronomia ne poate ajuta să ilustrăm unul dintre numeroasele obstacole de pe parcursul acestui proces – şi anume, percepţia distanţei. Figura 17 prezintă o fotografie făcută cu Telescopul Hubble1, îndreptat spre haloul

— Sferic al stelelor din jurul galaxiei Andromeda (denumit de astro – „nomi M31). O galaxie este o vastă mulţime de câteva sute de miliarde de stele asemănătoare cu Soarele. „— V. – M31, aflat la o distanţă de circa p… 1… 2, 5 milioane de ani-lumină, este p. J „unul dintre vecinii cei mai apropiaţi ai galaxiei noastre – Calea Lactee. (Un an-lumină are aproximativ 9, 5 trilioane de kilometri.) Fotografia din figura 17 cuprinde circa zece mii de stele din M31 şi aproape o sută de alte galaxii, care se văd în fundal (dintre care unele apar sub forma unor corpuri cereşti neclare, de mari dimensiuni). Aici este problema. Privind fotografia, nu putem aprecia prin comparaţie dacă stelele se află în propria noastră „ogradă" (la o distanţă de 2, 5 milioane de ani-lumină), iar galaxiile, la mai mult de

10 *miliarde* de ani-lumină! Similar, când privim la lumea din jurul nostru, ochiul nu recunoaşte decât direcţia razei de lumină pe care a călătorit un foton. Cum imaginea este proiectată pe o suprafaţă bidimensională (retina), fără câteva alte informaţii suplimentare, creierul nu are nicio indicaţie despre distanţa până la punctul de plecare al fotonului. În cazul unei stele relativ apropiate, astronomii rezolvă această problemă de determinare a distanţei folosind *metoda calculării elipselor de paralaxă.* Ei privesc steaua din două puncte diferite ale orbitei Pământului (figura 18). În cursul unui an, steaua apropiată pare să se deplaseze în raport cu stelele îndepărtate (fixe), din fundal. Măsurând unghiul asociat acestei mişcări aparente, cunoscând diametrul orbitei terestre şi folosind trigonometria simplă de liceu, se poate calcula distanţa până la stea.

Oamenii îşi folosesc ochii în exact acelaşi mod pentru percepţia spaţială. Puteţi descoperi acest mecanism, cunoscut ca *vedere stereoscopicaa,* prin următorul experiment simplu. Întindeţi braţul, ridicaţi un deget şi priviţi-l în raport cu un obiect oarecare din fundal. Închizând alternativ câte un ochi, veţi avea senzaţia că degetul îşi schimbă poziţia faţă de obiectul de referinţă din spatele lui. Dacă apropiaţi degetul de ochi, veţi observa că distanţa dintre cele două poziţii creste. Această deplasare aparentă (paralaxă) se produce deoarece cei doi ochi văd degetul din puncte diferite. Cum paralaxa depinde de distanţa până la obiect, măsurând unghiul dintre poziţiile lui aparente şi cunoscând depărtarea dintre ochi, creierul „trigonometrizează" distanţa până la obiect. Dacă vi se pare perfect normal ca închiderea unui ochi să ducă la o slăbire a percepţiei profunzimii spaţiale, s-ar putea să credeţi că rolul celor doi ochi în vederea stereoscopică a fost cunoscut încă din Antichitate. În mod surprinzător, chiar şi unora dintre cei mai mari cercetători ai perspectivei le-a scăpat în întregime conceptul de vedere stereoscopică. Matematicieni precum Euclid din vechea Grecie, arhitecţi renascentişti precum Brunelleschi şi

Alberti, pictorii Piero della Francesca, Paolo Ucello şi Albrecht Dürer, şi chiar marele Isaac Newton au luat cei doi ochi drept o simplă manifestare a simetriei bilaterale, fără nicio altă funcţie specială. Primul care a observat că doi ochi pot realiza ceea ce unul singur nu poate face a fost reprezentantul prin excelenţă al Renaşterii – Leonardo da Vinci (1452 – 1519). Leonardo nota că atunci când privim cu ambii ochi un obiect, cel drept reuşeşte să vadă şi o parte din spaţiul de la dreapta obiectului, în timp ce stângul vede o parte din spaţiul de la stânga obiectului. Leonardo conchidea deci că „obiectul... văzut cu ambii ochi devine parcă transparent... dar acest lucru nu se poate întâmpla când un obiect... este privit cu un singur ochi". În ciuda acestei intuiţii, restrângându-şi atenţia doar la sfere, Leonardo a scăpat ocazia de a descoperi că cei doi ochi surprind imagini diferite nu numai ale fundalului, ci şi ale obiectului însuşi. Cel care a stabilit importanţa vederii binoculare pentru perceperea distanţelor a fost astronomul german Johannes Kepler (1571 – 1603). În două cărţi remarcabile3, *Astronomiae Pars Optica (Partea optica a astronomiei),* publicată în 1604, şi *Dioptrice (Dioptrica,* stele îndepărtate *

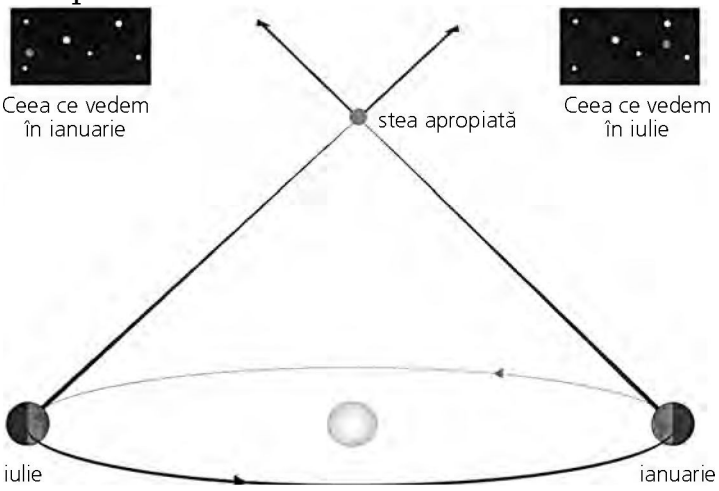


Figura 18

ramura opticii care se ocupă de refracţie), publicată

în 1611, Kepler a descris detaliat optica ochiului, explicând rolul ochelarilor şi formulând o teorie a vederii stereoscopice. Opera lui Kepler a rămas însă oarecum neobservată; nici măcar Charles Wheatstone4, care a redescoperit în 1838 mecanismul perceperii profunzimii, nu pare să fi fost la curent cu ea.

Charles Wheatstone (1802 – 1875) se născuse într-o familie de mari iubitori ai muzicii, primele lui cercetări având drept obiect sunetele, vibraţiile unor elemente sonore precum corzile sau tuburile şi instrumentele muzicale. În 1822, el a făcut o demonstraţie publică în prăvălia londoneză a tatălui său, oferind muzică nu numai pentru urechi, ci şi pentru ochi. „Lira Fermecată" pe care o crease era atârnată de o sârmă subţire care trecea prin plafon, ajungând în încăperea de deasupra, unde era conectată la cutiile de rezonanţă ale unui pian, unei harpe şi unui timpanon. Atunci când Wheatstone cânta la instrumentele din încăperea de sus, Lira Fermecată părea să cânte singură. Experimentator cu multă imaginaţie, el a inventat concertina (un instrument muzical asemănător cu un mic acordeon) şi a obţinut un brevet de invenţie în Anglia, pentru telegraful electric.

Wheatstone şi-a început experimentele asupra vederii stereoscopice în 1832, prezentându-şi teoria într-o lucrare publicată pe 21 iunie 1838. Titlul lucrării era „Contribuţii la fiziologia vederii. Prima parte. Despre nişte fenomene remarcabile, până acum neobservate, ale vederii binoculare". Primul ei paragraf descria esenţa descoperirii – faptul că incongruenţa imaginilor de pe cele două retine şi procesul mintal care urmează dau naştere percepţiei spaţiale. Apelând la cuvintele lui Wheatstone:

Atunci când un obiect este privit de la o distanţă atât de mare încât axele optice ale ambilor ochi ajung să fie practic paralele, proiecţiile sale, văzute de fiecare ochi în parte, sunt asemănătoare, iar cei doi ochi văd acelaşi lucru, ca şi când obiectul ar fi privit cu un singur ochi… Dar această asemănare dispare atunci când obiectul este plasat atât de aproape de noi, încât, pentru a-l vedea, axele

optice trebuie să devină convergente… Acest fapt poate fi verificat cu uşurinţă aşezând orice corp tridimensional, de pildă un cub, la o distanţă medie faţă de ochi şi privindu-l alternativ cu câte unul dintre ei, în timp ce celălalt este închis, iar capul e ţinut absolut fix.

Am descris atât de amănunţit descoperirea proceselor simple implicate în percepţia profunzimii spaţiale deoarece această poveste ne ajută să exemplificăm imensele dificultăţi întâmpinate la încercările de înţelegere temeinică a fenomenului percepţiei. Teoriile privitoare la percepţia umană pot umple, şi chiar au umplut, volume întregi. Aici mă voi concentra doar la funcţia simetriei în acest proces.

Rolul simetriei în percepţie a fost adus în centrul atenţiei de către şcoala de gândire cunoscută sub denumirea de *Gestalt Psychologie.* Psihologii Max Wertheimer, Kurt Koffka şi Ivo Kohler, care au iniţiat această doctrină, au înfiinţat un influent laborator de cercetări în psihologie la Universitatea din Frankfurt, în 1912. Una dintre problemele-cheie pe care au abordat-o psihologii gestaltişti a fost cea a organizării perceptuale – modul în care fragmentele disparate de informaţie primite prin intermediul simţurilor sunt organizate în structuri perceptuale unitare. Cum ştim care elemente constitutive au legătură unele cu altele, pentru a forma imaginea generală a unui obiect? Cum deosebim un obiect de altul şi cum facem distincţie între un obiect şi fundal? „Legea" fundamentală a organizării perceptuale din psihologia gestaltistă5 este cunoscută sub denumirea de *Principiul pregnanţei,* şi poartă în mod obişnuit numele de legea „figurii inteligibile". Legea afirmă: „Dintre mai multe organizări geometrice posibile, cea văzută este cea cu forma cea mai clară, simplă şi stabilă". Pentru psihologii gestaltişti, simetria era deci unul dintre elementele-cheie, ce contribuia semnificativ la „inteligibilitatea" figurii. Un aranjament de patru puncte, ca cel din figura 19, va fi perceput ca un pătrat, deoarece „inteligibilitatea" pătratului ca formă simetrică, închisă şi stabilă este mai

mare decât, să zicem, cea a unui triunghi căruia i s-a adăugat un punct suplimentar. În vreme ce psihologii gestaltişti n-au reuşit niciodată să formuleze o teorie precisă a percepţiei formei, teoreticienii ulteriori, precum psihologul olandez Emanuel Leeuwenberg şi americanii Wendell Garner şi Stephen Palmer, au extins principiile lor fundamentale. Garner şi Palmer au recunoscut în special6 rolul simetriilor de diverse tipuri (precum simetriile de rotaţie şi de reflexie) în sporirea „inteligibilităţii" figurii.

Leeuwenberg şi colaboratorii săi au dezvoltat o teorie a reprezentării formei în general, cunoscută sub denumirea de *teoria informaţiei structurale7.* Cele două concepte fundamentale ale acestei teorii sunt *codurile* şi *încărcăturile informaţionale.* Codurile sunt descrieri perceptuale simple care pot genera o figură observată. De exemplu, pentru a descrie un dreptunghi, putem porni din colţul din stânga-sus, stabilind o lungime pentru segmentul care trebuie desenat (figura 20) şi un unghi pentru direcţia în care trebuie să ne îndreptăm ulterior. Stabilim apoi următoarea lungime şi dăm din nou o valoare unghiulară.

Codul final pentru desenarea dreptunghiului ar lua forma *a* 90 *b* 90 *a* 90 *b* 90. Observaţi totuşi că, deoarece aceleaşi instrucţiuni se repetă de două ori, putem simplifica acest cod scriind 2*(*a* 90 *b* 90).

Încărcătura informaţională este o măsură a complexităţii celui mai simplu cod care duce sarcina la îndeplinire. În general, o puteţi calcula prin numărarea parametrilor codului (precum *a, b* şi 90 din exemplul precedent). Ideea fundamentală a acestei teorii este că „inteligibilitatea" figurii creste odată cu scăderea încărcăturii informaţionale. Figurile simetrice conţin o încărcătură informaţională mai mică şi deci se află mai sus pe scara „inteligibilităţii". Pentru codul dreptunghiului, bunăoară, încărcătură informaţională este 4: numărul de iteraţii (2); cele două lungimi *(a,* b); şi unghiul (90). Pe de altă parte, pentru un patrulater oarecare, încărcătura informaţională ar fi 8 (patru lungimi şi patru unghiuri).

Alte două elemente importante din principiile

gestaltiste ale organizării sunt *proximitatea* şi *similitudinea.* „Legea" proximităţii spune că, în general, formele apropiate spaţial una de alta sunt procesate în grup de creier. În figura 21 a noi percepem nişte coloane, deoarece intervalele verticale dintre puncte sunt mai mici decât cele orizontale. În figura 21 b, este exact invers, motiv pentru care percepem nişte linii. Atunci când intervalele sunt egale (figura 21 c), rămânem cu o impresie ambiguă.

Şi formele similare tind să fie grupate prin asociere, similitudinea putând fi uneori un element organizaţional mai influent decât proximitatea. În figura 22, tindem să percepem nişte coloane din cauza similitudinii cercurilor negre, deşi, dacă am lua în calcul numai proximitatea şi toate cercurile ar fi negre, am vedea nişte linii.

Simetria joacă un rol important în recunoaşterea similitudinii, deoarece reprezintă un adevărat *invariant* – o imunitate la schimbare. Ca urmare, simetria este o trăsătură deosebit de utilă, pe care sistemul perceptiv o foloseşte pentru a determina dacă formele observate sunt similare sau diferite.

Un alt principiu gestaltist este cel al *continuităţii* – simbolul X este perceput – sub forma a doua linii care se intersecgtează, nu a doua litere v, una în poziţie normală şi alta în poziţie inversată, având vârfurile în contact. *Destinul comun* reprezintă şi el un principiu de grupare. Tindem să grupăm lucrurile care se mişcă cu aceeaşi viteză, în aceeaşi direcţie. Profetul biblic Amos8 era deja pe deplin conştient de acest principiu atunci când întreba: „Pot doi oameni să meargă împreună dacă nu şi-au dat o întâlnire?"

Psihologul Stephen Palmer şi colaboratorii săi de la Universitatea din California, Berkeley, au adăugat la principiile organizării pe cele ale *regiunii comune, conexiunii* şi *sincroniei*9. Figura 23 ilustrează aceste principii. Regiunea comună se referă la faptul că elementele sunt grupate atunci când sunt incluse într-o zonă închisă a spaţiului (figura 23 a). Conexiunea

presupune să percepem drept unităţi elementele între care pare a exista o legătură fizică (figura 23 b). În fine, sincronia reflectă faptul că evenimentele vizuale simultane sunt percepute ca fiind asociate (figura 23 c).

Simetria, în particular cea bilaterală, este de asemenea unul dintre elementele-cheie ale izolării vizuale a unui obiect – capacitatea de a-l vedea detaşându-se dintr-un anumit fundal. Aruncaţi o privire rapidă pe figura 24 – atât în stânga, cât şi în dreapta – şi decideţi care culoare reprezintă figura şi care e fundalul.

Ariile bilateral simetrice tind să fie percepute ca figuri în raport cu fundaluri asimetrice. Ca urmare, în stânga figurii 24, suntem înclinaţi să identificăm ariile negre drept figuri, pe când în dreapta, figurile sunt cele albe. Orientările verticale şi orizontale sunt, la fel, mai susceptibile să fie văzute drept figuri decât oricare alte orientări. Şi în cele din urmă, ariile mai mici înconjurate de unele mai mari tind să fie identificate drept figuri, la fel ca şi formele semnificative sau familiare.

Aţi băgat probabil de seamă că „legile” iniţiale ale gestaltismului nu erau decât *euristice* – nişte principii empirice, care pot funcţiona de cele mai multe ori, dar nu totdeauna. Ele foloseau concepte vag definite, precum „inteligibilitatea” sau „similitudinea”. Ne putem pune întrebarea cum se face că funcţionează totuşi. Răspunsul este că reprezintă, probabil, o combinaţie de învăţare şi evoluţie. Aşa cum a spus cândva Oscar Wilde10, „Experienţa este numele pe care toţi oamenii îl dau greşelilor lor”. Generaţii de-a rândul, umanitatea a uzat de percepţii şi, dintr-un număr infinit de experienţe perceptuale, a învăţat la ce să se aştepte. În ciuda neajunsurilor lor, principiile iniţiale ale gestaltismului au fost utile, deoarece furnizau un răspuns rapid. Atunci când vreţi să vă găsiţi cheile, vă duceţi întâi în cele două locuri unde le lăsaţi de regulă, şi numai după aceea, dacă daţi greş, vă apucaţi să scotociţi sistematic casa.

În general, teoriile psihologice şi rezultatele experimentale recente confirmă rolul important al

simetriei în percepţie11. Multe experimente arată că simetria bilaterală faţă de o axă verticală este cel mai uşor de recunoscut (adică e recunoscută cel mai repede) şi că ea este folosită ca element de apreciere în judecăţi de tip „identitate-diferenţă”. În esenţă, simetria este o proprietate care atrage privirile încă din primele stadii ale dezvoltării vederii. Ea este, de asemenea, utilă pentru a deosebi organismele vii (inclusiv potenţialii prădători) de lucrurile neînsufleţite şi în selecţia partenerilor doriţi (voi reveni la aceste subiecte în capitolul 8). Alte experimente au demonstrat că figurile simetrice sunt reproduse mai uşor decât cele asimetrice. Într-un studiu interesant, psihologii Jennifer Freyd şi Barbara Tversky12 de la Universitatea Stanford au descoperit că, în prima fază, subiecţii determinau rapid dacă un ansamblu este sau nu simetric. Apoi, dacă el era perceput ca fiind simetric, unii subiecţi distorsionau mintal imaginea şi presupuneau (uneori incorect) că şi părţile lui componente ar fi simetrice.

Un rezultat interesant, care sugerează că preferinţa pentru diverse tipuri de simetrii poate fi o caracteristică învăţată, provine din experimentele conduse de psihologul Ioannis Paraskevopoulos13 de la Universitatea Illinois. Subiecţii lui au fost 76 de elevi de scoală elementară. Paraskevopoulos a constatat că simetria dublă (verticală şi orizontală) – era preferată la vârsta de şase ani, simetria bilaterală (numai reflexie verticală) – la vârsta de şapte ani, iar simetria orizontală (reflexie orizontală) la vârsta de unsprezece ani.

Unele dintre cele mai captivante studii recente sunt cele care încearcă să folosească rezonanţa magnetică nucleară (RMN)

pentru realizarea unor hărţi ale ariilor cerebrale14 influenţate de simetrie. Psihologul Christopher W. Tyler de la Smith-Kettlewell Eye Research Institute din San Francisco a prezentat unor subiecţi diverse configuraţii cu simetrii de translaţie şi reflexie. El a constatat că aceşti stimuli activau o regiune din lobul occipital, a cărei funcţie

este în rest necunoscută.

În mod surprinzător, în ariile cu funcţii vizuale cunoscute s-a constatat o foarte slabă activare sau chiar absenţa acesteia. Tyler a conchis că regiunea occipitală codifică probabil prezenţa simetriei în câmpul vizual.

Relaţia dintre simetrie şi orientare15 este la fel de fascinantă. Figurile simetrice nu se schimbă atunci când sunt rotite, reflectate sau translatate în anumite moduri. Multe forme nu rămân însă simetrice oricare ar fi transformarea la care sunt supuse (cu excepţia celei identice, care le lasă neatinse), iar modul în care le percepem noi este Figura 26 clar afectat, bunăoară, de orien tarea lor. Aruncaţi, de exemplu, o scurtă privire la figura 25. Aţi recunoscut în ea harta Africii? Sau, fără a întoarce cartea cu susul în jos, recunoaşteţi persoana din figura 26?

Chiar şi percepţia simetriei poate ascunde anumite capcane. O formă poate prezenta simetrie de reflexie în raport cu o anumită axă, ca cea din figura 27 a, dar dacă n-o întoarceţi ca în figura 27 b, aşa încât axa de simetrie să fie verticală, s-ar putea să nu-i percepeţi simetria. Cercetătorul Irvin Rock şi colaboratorii săi de la Universitatea Rutgers au efectuat o serie de experimente destinate testării dependenţei de orientare a percepţiei formei. Mai exact, ei doreau să vadă dacă percepţia simetriei bilaterale se face când axa de simetrie a imaginii formate pe retină este verticală sau e suficient ca ea să fie doar percepută ca fiind verticală. Cercetătorii au folosit o formă standard, ca cea prezentată în figura 28 a. Această formă prezintă simetrie de reflexie, atât pe verticală, cât şi faţă pe orizontală. Subiecţilor li s-a cerut să indice care dintre figurile 28 b şi 28 c ar fi mai asemănătoare

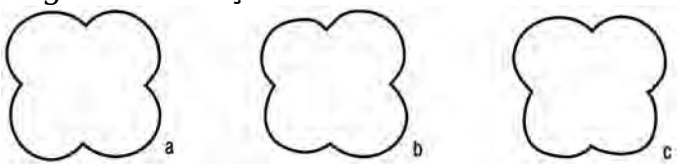


Figura 28

cu 28 a. Observaţi că figura 28 b a fost puţin modificată, aşa încât să nu fie simetrică faţă de o axă verticală, dar să-şi păstreze simetria faţă de axa orizontală, în timp ce cu figura 28 c s-a procedat invers. Atunci când au observat figurile fără a-şi înclina capetele, cei mai mulţi dintre subiecţi au ales figura 28 c. Era de aşteptat; fizicianul şi filosoful moravo-austriac Ernst Mach16 (1838 – 1916) sesizase încă din 1914 că figurile sunt percepute ca simetrice în primul rând ca urmare a simetriei de reflexie în raport cu o axă verticală. Dar apoi a venit surpriza. Când observatorii şi-au înclinat capetele cu 45°, au continuat să aleagă figura 28 c drept cea mai asemănătoare cu figura 28 a, în ciuda faptului că în această orientare nici 28 b, nici 28 c nu-şi păstrau simetria verticală în imaginea formată pe retină. Din acest experiment, dar şi din altele, Rock a tras concluzia că „perceperea unei figuri noi nu este mult afectată de simpla modificare a orientării imaginii ei pe retină”. El a considerat că ceea ce contează cu adevărat nu este orientarea figurii în ambianţa ei, ci faptul că noi le atribuim figurilor direcţiile sus, jos, stânga, dreapta. Aceste atribuiri depind de regulă de alte informaţii primite pe cale vizuală, cum sunt direcţia forţei de gravitaţie şi sistemul de referinţă al mediului înconjurător. Figurile incorect orientate în raport cu direcţiile prestabilite de noi sunt greu de recunoscut. Lucru interesant, Rock a constatat că efectul asupra formei percepute este minimal atunci când singura schimbare efectuată este o inversare stânga-dreapta. Aceste rezultate confirmă mai departe importanţa covârşitoare a simetriei bilaterale în percepţie. Rock a recunoscut totuşi că anumite forme, cum ar fi cuvintele scrise cursiv sau portretele, devin foarte greu de recunoscut chiar dacă nu se schimbă decât orientarea imaginii de pe retină.

Figura 29

Deşi simetria acţionează de cele mai multe ori ca un adjuvant al percepţiei, un anumit tip de simetrie poate determina ochii să interpreteze greşit ceea ce văd. Fizicianul scoţian David Brewster (1781 – 1868), care a inventat şi caleidoscopul în 1816, a remarcat ceva straniu contemplând un tapet cu motiv repetat, ce prezenta o simetrie de translaţie. Productivitatea firmei Morris and Company, dar şi a altora din acea perioadă, făcea ca asemenea motive să fie pretutindeni întâlnite în epoca victoriană. Spre uimirea sa, Brewster a descoperit că unele dintre formele desenate „sar" efectiv de pe perete şi devin iluzii tridimensionale, cunoscute acum drept *iluzii de tapet* sau *de scară rulantă,* deoarece atât tapetele, cât şi scările rulante au configuraţii ce se repetă. Sunteţi probabil deja familiarizaţi cu acest fenomen din numeroasele cărţi şi postere de tip Ochiul Magic. Fascinaţia pentru aceste *autostereograme* generate pe calculator17 – configuraţii care sar în tridimensionalitate atunci când sunt privite cu ochii încrucişaţi – a atins magnitudinea unei epidemii la începutul anilor ’90. Figura 29 ilustrează acest efect surprinzător. Dacă o fixaţi circa un minut focalizându-vă

privirea ca şi cum aţi privi o imagine din spatele paginii, surferii se vor materializa în mod miraculos ca entităţi tridimensionale. Din motive nu foarte clare, unii oameni nu pot percepe iluziile create de autostereograme. Aşa că, dacă figura 29 nu capătă brusc profunzime pentru dumneavoastră, nu disperaţi; aparţineţi unui club exclusivist. Ideea din spatele iluziilor de tip Ochiul Magic s-a născut din cercetările psihologului ungaro-american Bela Julesz, făcute în 1959 asupra percepţiei profunzimii. Colaboratorul lui Julesz, psihologul Christopher Tyler de la Smith-Kettlewell Eye Research Institute, a descoperit în 1979 că putea folosi o tehnică de tipărire *offset* pentru a genera stereograme cu o singură imagine. Explicaţia magiei elementelor repetate e simplă. Cu fiecare ochi fixat asupra unui alt element al unei perechi de forme geometrice adiacente din motivul repetat, creierul percepe în mod eronat cele două elemente ca fiind unul singur, aflat la o altă distanţă (figura 30). Cauza „erorii" creierului este, bineînţeles, faptul că motivele repetate creează imagini identice pe cele două retine, dând impresia focalizării privirii pe un singur obiect.

Când configuraţia repetată este restrânsă într-un spaţiu mic °i constă din motive cu mare contrast cromatic, ea poate produce o foarte puternică iluzie de mişcare. Artista britanică Bridget Riley, reprezentantă a curentului *Op,* a uimit mulţi admiratori cu o asemenea configuraţie halucinantă, prezentată în tabloul ei *Cădere* (figura 31).

Cu excepţia permutărilor şi a principiului excluziunii, formulat de Pauli, până acum n-am prezentat decât simetrii de forme şi configuraţii. Ele au fost simetrii ale unor obiecte din spaţiu, impuse de dispunerea anumitor elemente constitutive şi percepute prin simţuri. Putem *vedea* că o catedrală are simetrie bilaterală, că motivele unui tapet prezintă simetrie de translaţie şi că un cerc are simetrie de rotaţie. Simetriile care stau la baza legilor fundamentale ale naturii se înrudesc cu cele pomenite anterior, dar în loc să pună accentul pe formă sau aspect exterior, ele îl pun pe întrebarea: Ce operaţii pot fi

efectuate asupra lumii din jurul nostru, aşa încât legile ce descriu toate fenomenele observate să rămână neschimbate?

Regulile jocului

Care sunt legile naturii? Biologul Thomas Henry Huxley18 (1825 – 1895), cel mai aprig apărător al teoriei darwiniene a evoluţiei şi selecţiei naturale, a oferit următoarea explicaţie:

Tabla de şah este lumea, piesele sunt fenomenele universului, regulile jocului sunt ceea ce noi numim legile Naturii. Jucătorul de pe cealaltă parte stă ascuns. Ştim că jocul lui este totdeauna corect, normal, perseverent. Dar mai ştim şi că, spre dauna noastră, el nu trece niciodată cu vederea vreo greşeală şi nici nu face vreo concesie cât de mică ignoranţei.

Această definiţie, aparţinând omului care fusese poreclit „Buldogul lui Darwin", este lipsită de ambiţie după standardele moderne. Fizicienii din ziua de azi ar vrea ca legile naturii să nu reprezinte numai regulile jocului, ci să explice, în plus, existenţa şi proprietăţile tablei de şah, dacă nu chiar şi a pieselor!

Până în secolul al XVII-lea, oamenii nici n-au visat măcar să dispună de un corp de legi care să explice orice. Galileo Galilei (1564 – 1642), René Descartes (1596 – 1650) şi mai ales Isaac Newton (1642 – 1727) au demonstrat pentru prima oară că o mână de legi (cum sunt legile mişcării şi ale gravitaţiei)

putea explica o abundenţă de fenomene, mergând de la căderea merelor şi de la mareele de pe coaste, până la mişcarea planetelor.

Alţii au călcat pe giganticele lor urme. În 1873, fizicianul scoţian James Clerk Maxwell (1831 – 1879) şi-a publicat *Tratatul despre electricitate şi magnetism* – o lucrare monumentală, ce unifica toate fenomenele electrice, magnetice şi luminoase sub umbrela a numai patru ecuaţii matematice. Plecând de la rezultatele experimentale ale fizicianului englez Michael Faraday (1791 – 1867), Maxwell a reuşit să demonstreze că, aşa

cum forţa care menţine planetele pe orbitele lor şi cea care reţine obiectele pe suprafaţa Pământului sunt una şi aceeaşi, electricitatea şi magnetismul nu reprezintă decât manifestări diferite ale aceluiaşi fenomen fizic. Secolul al XX-lea a fost martorul nu a uneia, ci a doua revoluţii ştiinţifice majore. În primul rând, teoriile relativităţii restrânse şi generalizate ale lui Einstein au schimbat pentru totdeauna semnificaţia spaţiului şi timpului. Aceste două concepte au devenit inextricabil legate în entitatea cunoscută acum drept *spaţiu-timp.* Relativitatea generalizată a mai sugerat că gravitaţia nu este o forţă misterioasă care acţionează de la distanţă, ci pur şi simplu o manifestare a dimensiunii spaţiu-timp, care este curbată de materie precum o foaie de cauciuc ce se deformează sub greutatea unui obuz. Orice obiect care se mişcă prin acest spaţiu curbat – cum sunt planetele în cursa lor – nu urmează traiectorii drepte, ci curbe. În al doilea rând, pe un front diferit, toată speranţa într-o lume complet deterministă a fost zdruncinată odată cu introducerea *mecanicii cuantice.* În mecanica newtoniană, şi chiar în relativitatea generalizată, dacă ajungeai să cunoşti atât poziţia fiecărei particule din univers la un anumit moment dat, cât şi viteza şi direcţia ei de mişcare din acel moment, puteai simultan să prezici în mod neambiguu viitorul universului şi să spui întreaga istorie a cosmosului. Singurele neajunsuri ar fi apărut în rarele ocazii în care relativitatea generală dă greş, ca în cazul corpurilor cereşti ajunse în fază de colaps, cunoscute sub denumirea de găuri negre. Mecanica cuantică a schimbat situaţia. Nici măcar poziţia şi viteza unei singure particule nu poate fi determinată cu precizie. Singurele lucruri care pot fi determinate în univers sunt probabilităţile diverselor rezultate, nu rezultatele însele. Deşi din motive diferite, universul seamănă oarecum cu vremea – cel mai bun lucru pe care-l putem face este să prezicem probabilitatea ca mâine să plouă, nu să spunem cu certitudine că va ploua sau nu. Dumnezeu joacă într-adevăr zaruri.

Cu fiecare pas făcut înspre revoluţiile relativităţii şi

mecanicii cuantice, rolul simetriei în legile naturii a devenit tot mai apreciat. Fizicienii nu se mai mulţumesc să găsească explicaţii ale unor fenomene individuale, ci sunt acum mai convinşi ca oricând că natura are un plan ascuns, în care simetria deţine un rol-cheie. O simetrie a legilor 19 presupune ca observarea fenomenelor naturii din diferite puncte de vedere să ne conducă la concluzia că respectivele fenomene sunt guvernate de exact aceleaşi legi ale naturii. Bunăoară, atunci când efectuăm experimente la New York, Tokio sau la celălalt capăt al Căii Lactee, legile naturii care explică rezultatele acestor experimente trebuie să rămână neschimbate. Observaţi că simetria legilor nu presupune neapărat rămânerea neschimbată a rezultatelor experimentelor. Intensitatea gravitaţiei pe Lună e diferită de cea de pe Pământ, motiv pentru care astronauţii ajunşi acolo au fost văzuţi sărind mai sus decât ar fi făcut-o pe planeta noastră. Dar dependenţa intensităţii atracţiei gravitaţionale de masa şi raza Lunii este aceeaşi ca dependenţa gravitaţiei Pământului de propria lui masă şi rază. Această simetrie a legilor – imunitatea faţă de schimbări la o deplasare dintr-un loc în altul – este de translaţie. Fără ea, universul ar fi fost efectiv imposibil de înţeles. Principalul motiv pentru care noi putem interpreta relativ uşor observaţiile făcute asupra galaxiilor de la zece miliarde de ani-lumină depărtare este că atomii de hidrogen se supun exact aceloraşi legi ale mecanicii cuantice ca cei de pe Pământ.

Legile naturii sunt simetrice şi în cazul rotaţiei. Fizica nu are nicio direcţie preferenţială în spaţiu – descoperim aceleaşi legi indiferent dacă stăm drepţi sau înclinaţi ori dacă apreciem direcţiile în funcţie de cele stabilite convenţional de noi: sus, jos, nord sau sud-vest. Lucrul acesta e mai puţin intuitiv decât credeţi. Vă reamintesc că pentru fiinţele care au evoluat pe suprafaţa Pământului există o distincţie clară între sus şi jos. Aristotel şi adepţii săi credeau că obiectele cad jos deoarece aceasta este poziţia naturală a lucrurilor grele. Newton, evident, a dovedit că sus şi jos ni se par diferite

nu fiindcă legile fizicii depind de ele, ci fiindcă se întâmplă să simţim atracţia gravitaţională a acestei mase relativ mari pe care o numim Pământul de sub picioarele noastre. Aceasta e o schimbare a ambianţei, nu a legii. Într-un fel suntem norocoşi – simetriile de translaţie şi rotaţie ne asigură că, indiferent unde ne-am găsi în spaţiu sau oricum am fi orientaţi, vom descoperi aceleaşi legi.

Un exemplu simplu ne poate ajuta să clarificăm şi mai mult deosebirea dintre simetriile formelor °i cele ale legilor. Vechii greci credeau că orbitele planetelor trebuie să fie circulare, deoarece această formă geometrică este simetrică cu orice unghi ar fi rotită. În schimb, simetria de rotaţie a legii newtoniene a gravitaţiei ar presupune ca orbitele să poată avea orice orientare în spaţiu (figura 32). Orbitele nu trebuie să fie circulare; ele pot fi, şi chiar sunt, eliptice.

Mai există şi alte simetrii, mai esoterice, care lasă invariante legile naturii; vom reveni asupra câtorva dintre ele şi a importantelor lor implicaţii în Capitolul 7. Lucrul esenţial pe care-l avem de reţinut este însă acela că simetria este unul dintre cele mai importante instrumente în descifrarea structurii naturii.

Până acum, rapida noastră trecere în revistă a simetriilor, fie ale obiectelor, fie ale legilor naturii, a fost precum cea a unor turişti aflaţi într-o ţară străină. Am putut admira peisajul, dar pentru a înţelege mai profund cultura, trebuie să învăţăm limba. Este deci momentul unui curs rapid de tip Berlitz.

Mama tuturor simetriilor

Deşi scurtă, privirea aruncată până acum în universul simetriilor ne ajută să vedem clar că ele stau exact la intersecţia dintre ştiinţă, artă şi psihologia percepţiei. Simetria, în general, este esenţa formelor, legilor şi obiectelor matematice care rămân neschimbate prin transformări. Limbajul care o descrie trebuie să identifice această esenţă invariantă chiar şi atunci când ea se ascunde sub diverse travestiuri disciplinare.

Limbajul financiar, bunăoară, este unul al operaţiilor

aritmetice. Dacă vreţi să comparaţi dintr-o privire puterile economice a doua companii, nu e nevoie să citiţi volume întregi de teorie; e suficientă compararea câtorva cifre-cheie. Când Isaac Newton şi-a formulat celebrele lui legi ale mişcării, el a dezvoltat şi limbajul analizei matematice pentru a fi capabil să le exprime şi să le manipuleze. Se poate afirma că una dintre performanţele artei abstracte şi non-obiectuale a secolului XX a fost transformarea culorii într-un limbaj al semnificaţiei şi emoţiei. Unii pictori au abandonat aproape în întregime forma în favoarea comunicării exclusive prin culoare.

Pentru a explora labirinturile simetriei, matematicienii, savanţii şi artiştii îşi luminează calea cu limbajul *teoriei grupurilor.* Asemenea unui club exclusivist, grupul matematic cuprinde nişte membri care trebuie să asculte de anumite reguli. O *mulţime* matematică este orice ansamblu de entităţi, fie că e vorba de componentele unui avion demontat, de literele alfabetului ebraic sau de o colecţie bizară, constând din urechea lui van Gogh, iepuraşul de Paste, toate ziarele albaneze şi datele meteorologice de pe Marte. Pe de altă parte, un *grup* este o mulţime care trebuie să asculte de anumite reguli, supuse unei legi de compoziţie. De exemplu, unul din cele mai familiare grupuri este cel al tuturor numerelor întregi (pozitive, negative şi zero; adică… – 4 – 3 – 2 – 1, 0, 1, 2, 3, 4…), cărora li se asociază simpla operaţie de adunare, aceasta reprezentând legea de compoziţie.

Proprietăţile care definesc un grup sunt:

1. *închiderea.* Rezultatul obţinut prin compunerea (prin intermediul operaţiei asociate) oricăror două elemente trebuie să fie el însuşi un element al mulţimii. În grupul numerelor întregi, suma oricăror două numere este şi ea un număr întreg (de ex.: 3 + 5 = 8).
2. *Asociativitatea.* Operaţia trebuie să fie asociativă – dându-se trei membri dispuşi într-o anumită ordine, îi puteţi compune (prin intermediul operaţiei) mai întâi pe oricare doi dintre ei, iar rezultatul este acelaşi, indiferent de modul în care sunt puse parantezele.

Adunarea, de exemplu, este asociativă: (5 + 7) ++ 13 = 25 şi 5 + (7 + 13) = 25, unde parantezele, „semnele de punctuaţie” ale matematicii, indică perechea pe care o adunaţi mai întâi.

3. *Elementul neutru.* Grupul trebuie să conţină un „element neutru” care, atunci când este compus cu orice membru, îl lasă neschimbat. În grupul numerelor întregi, elementul neutru este zero. De exemplu, 0 + 3 = 3 + 0 = 3.
4. *Elementul simetric.* Pentru orice element al grupului trebuie să existe un element simetric. Atunci când elementul este compus cu simetricul său, rezultă elementul neutru. Pentru numerele întregi, simetricul oricărui element are aceeaşi valoare absolută, dar semn opus: de exemplu, simetricul lui 4 este – 4, iar simetricul lui – 4 este 4; 4 + (4) = 0 °i (4) + 4 = °.

Faptul că această definiţie simplă poate conduce la o teorie care îmbrăţişează şi unifică toate simetriile din lumea noastră continuă să-i uimească până şi pe matematicieni. Aşa cum s-a exprimat cândva geometrul englez Henry Frederick Baker (1866 – 1956): „Ce belşug, ce măreţie de gândire pot izvorî din începuturi atât de mărunte!” Teoria grupurilor20 a fost numită de cunoscutul matematician James R. Newman „arta supremă a abstracţiei matematice”. Ea îşi trage incredibila forţă din flexibilitatea intelectuală oferită de definiţia sa. Aşa cum vom vedea în capitolele ulterioare ale cărţii, elementele unui grup pot fi reprezentate de orice, de la simetriile particulelor elementare ale universului sau diversele amestecuri ale unui pachet de cărţi de joc, până la simetriile unui triunghi echilateral. Iar legea de compoziţie asociată elementelor poate fi simplă, precum adunarea (vezi în exemplul precedent) sau ceva mai complicată, precum „urmată de”, pentru operaţia ce indică două transformări de simetrie (cum ar fi o rotaţie cu un anumit unghi, urmată de o rotaţie cu un alt unghi).

Teoria grupurilor explică ce se întâmplă atunci când diverse transformări, cum ar fi rotaţia şi reflexia, sunt

aplicate succesiv unui element particular sau când o operaţie particulară (cum este adunarea) combină între ele diverse elemente (cum ar fi numerele). Acest tip de analiză pune în lumină structurile fundamentale ale matematicii. Ca urmare, atunci când analiştii pieţei de mărfuri sau fizicienii particulelor elementare întâlnesc nişte dificultăţi aparent de netrecut în recunoaşterea configuraţiilor, ei se pot folosi eventual de formalismul teoriei grupurilor pentru a traversa graniţele interdisciplinare şi a împrumuta instrumente dezvoltate în alt domeniu pentru probleme similare.

Pentru a ne face o idee despre relaţia dintre teoria grupurilor şi simetrii, să începem cu un caz simplu, al simetriilor corpului uman. Oamenii rămân aproape neschimbaţi doar la două transformări de simetrie. Una este cea identică, aceasta lăsând totul aşa cum este şi constituind deci o simetrie bine definită. A doua este cea de reflexie faţă de un plan vertical – simetria (aproximativ) bilaterală. Să folosim simbolul *I* pentru a nota transformarea identică şi simbolul *r* pentru a nota reflexia. Mulţimea tuturor transformărilor de simetrie ale corpului uman are deci numai două elemente: *I* şi r. Ce se întâmplă dacă aplicăm succesiv aceste transformări? O reflexie urmată de o transformare identică nu diferă de o simplă reflexie. Simbolic, putem exprima aceasta sub forma: *I° r* = r, unde simbolul o înseamnă „urmat de”. De observat că ordinea transformărilor este totdeauna inversă, cea din partea dreaptă a simbolului aplicându-se prima. Aşadar, *a° b°e* înseamnă că ea fost aplicată întâi, urmată de *b* şi apoi de *a.*

Aplicarea succesivă a doua reflexii readuce imaginea corpului uman la forma iniţială, deoarece prima schimbă între ele stânga şi dreapta, iar cea de-a doua le schimbă la loc. Aplicarea unui *r* urmat de un *r* este deci echivalentă cu aplicarea unei transformări identice *I*: *r° r* = I.

Putem încerca acum să construim un fel de tablă a înmulţirii pentru cele două simetrii, în care elementul de pe linia *I* şi cel de pe coloana *r* este *I° r* şi aşa mai departe.

Cuvântul *înmulţire* este folosit aici în sens larg, pentru a desemna operaţia dintre transformări (în acest caz, „urmat de”).

O	***I***	***r***
I	*I*	*r*
r	*r*	*I*

Tabla înmulţirii dezvăluie un adevăr important: *Mulţimea tuturor transformărilor de simetrie ale corpului uman este un grup*! Să verificăm că toate proprietăţile definitorii ale unui grup sunt, într-adevăr, satisfăcute:

1. *închiderea.* Tabla înmulţirii demonstrează că rezultatul compunerii oricăror două transformări de simetrie este tot o transformare de simetrie. Dacă vă gândiţi bine, faptul nici nu este surprinzător. Cum oricare din cele două transformări lasă imaginea neschimbată, aplicarea lor succesivă va avea acelaşi efect.
2. *Asociativitatea.* Ea este clar satisfăcută, deoarece este adevărată pentru orice trei operaţii de acest fel, combinate prin „urmată de”. Atunci când aplicăm, de exemplu, *I*° *r*° r, nu are nicio importanţă cum punem parantezele.
3. *Elementul neutru.* Transformarea identică este o transformare de simetrie.
4. *Elementul simetric.* Tabla înmulţirii arată că fiecare din cele două transformări (cea identică şi reflexia) este propriul ei element simetric – aplicând succesiv pe oricare din ele, obţinem elementul neutru, reprezentat de transformarea identică: *I*° *I* = *I* şi *r*° *r* = *I*.

Grupul simetriilor corpului omenesc nu conţine decât două elemente, dar asocierea pe care am descoperit-o între simetrii şi grupuri este extrem de importantă. Pentru a alege un exemplu ceva mai complicat, examinaţi forma celor trei picioare din figura 33. Aceasta este emblema

insulei engleze Man, din Marea Irlandei.

Acestei forme îi corespund trei transformări de simetrie: (1) rotaţia cu 120° în jurul centrului; (2) rotaţia cu 240°; (3) transformarea identică (sau rotaţia cu 360°). De observat că figura nu este simetrică faţă de niciun fel de reflexie, deoarece reflexiile fac ca picioarele să fie direcţionate în sens greşit. Rotaţia de 120° poate fi notată cu a, cea de 240°, cu *b*, iar transformarea identică, cu *I*; să examinăm din nou ce se întâmplă când compunem transformările de simetrie prin operaţia „urmată de".

(desemnată prin simbolul o). Dacă rotim cu 120° şi iarăşi cu 120°, obţinem o rotaţie de 240°, ceea ce înseamnă că *a° a = b.* Analog, dacă rotim de două ori cu 240°, rezultatul este acelaşi ca şi cum am fi rotit cu 120°, deoarece 480° constă dintr-o rotaţie completă (360° = transformarea identică), plus 120°. Avem deci *b° b = a.* În sfârşit, o rotaţie de 120° urmată de o rotaţie de 240° (sau invers) duce la o rotaţie de 360°, adică la o transformare identică: *b° a = a° b = I.* Suntem acum în situaţia de a putea completa „tabla înmulţirii":

O	***I***	***a***	***b***
I	*I*	*a*	*b*
a	*a*	*b*	***I***
b	*b*	***I***	*a*

Am descoperit că mulţimea transformărilor de simetrie ale celor trei picioare formează şi ea un grup. Tabla demonstrează închiderea, iar transformările *a* şi *b* sunt, fiecare, elementul simetric al celeilalte – aplicarea lor una după alta readuce imaginea în poziţia iniţială, reprezentând deci transformarea identică.

Poate că începeţi să realizaţi că grupurile vor fi nelipsite oriunde avem de-a face cu simetrii. În fapt, *mulţimea tuturor transformărilor de simetrie ale oricărui sistem formează totdeauna un grup.* Lucrul acesta este uşor de înţeles. Dacă *A* este o transformare de simetrie,

adică aplicarea sa lasă sistemul neschimbat, iar *B* este o altă transformare de simetrie, atunci e clar că *Å B (B* urmat de A) are aceeaşi proprietate. De asemenea, oricărei transformări îi corespunde una simetrică, realizată în sens invers, care readuce lucrurile în starea lor iniţială. Aşa cum vom vedea în cele ce urmează, forţele unificatoare ale teoriei grupurilor sunt atât de uimitoare, încât Eric Tempell Bell (1883 – 1960), care s-a ocupat de istoria matematicii, a făcut odată următorul comentariu: „Ori de câte ori grupurile s-au manifestat sau au putut fi introduse, simplitatea s-a cristalizat din haos".

Spre deosebire de majoritatea descoperirilor matematice, atunci când a fost descoperit acest concept, nimeni nu căuta vreo teorie a grupurilor sau măcar a simetriilor. Dimpotrivă; teoria grupurilor a apărut oarecum din senin, dintr-o căutare de milenii a soluţiei unei ecuaţii algebrice. Meritându-şi descrierea de concept ce cristalizează simplitatea din haos, teoria grupurilor s-a născut ea însăşi din una dintre cele mai tumultuoase povesti din istoria matematicii. Aproape patru mii de ani de curiozitate şi luptă intelectuală, presăraţi cu intrigi, mizerie şi persecuţii, au culminat, în secolul al XIX-lea, cu crearea acestei teorii. Uimitoarea poveste, istorisită în următoarele trei capitole, a început odată cu zorii matematicii, pe malurile Nilului şi ale Eufratului.

3

Să nu uitaţi niciodată

5

acest lucru când vă cufundaţi printre ecuaţiile voastre

I

Într-un discurs intitulat „Ştiinţă şi Fericire" 1, prezentat la California Institute of Technology pe 16 februarie 1931, Albert Einstein remarca: „Preocuparea pentru om şi soarta sa trebuie să constituie totdeauna obiectivul principal al tuturor eforturilor tehnologice... aşa încât creaţiile minţii noastre să fie o binecuvântare, nu un blestem pentru omenire. Să nu uitaţi niciodată de acest

lucru când vă cufundaţi printre diagramele şi ecuaţiile voastre”. Nici Einstein însuşi nu-şi putea imagina cât de profetic avea să devină avertismentul lui după mai puţin de un deceniu, în timpul întunecatelor zile ale celui de-al Doilea Război Mondial şi al ororilor Holocaustului. Istoria ecuaţiilor matematice a început ţintind însă numai spre binele omenirii. Primele persoane care le-au dat atenţie n-au încercat nimic mai mult decât să răspundă unor nevoi cotidiene concrete.

„Us” şi „Aha”.

Cândva, prin al patrulea mileniu înainte de Cristos, în Mesopotamia, ţara dintre Tigru şi Eufrat, au luat naştere primele comunităţi urbane sumeriene. Aproape o jumătate de milion de tăbliţe cuneiforme şi alte obiecte arheologice găsite în această zonă ne spun povestea unei societăţi cu agricultură organizată, cu arhitectură impresionantă şi cu o vibrantă istorie politică şi culturală. Atunci, ca şi astăzi, această ţară fertilă era expusă invaziilor, rezultatul fiind o frecventă schimbare a populaţiilor dominante. La câteva secole după ce au fost înfrânţi de regele akkadian Sargon I (cca. 2276 – 2221 î.Hr.), amoriţii semiţi au preluat ţara Sumerului şi şi-au stabilit capitala în oraşul comercial Babilon. În consecinţă, pentru perioada cuprinsă aproximativ între anii 2000 şi 600 î.Hr., cultura întregii regiuni este numită în mod convenţional „babiloniană”. Evoluţia rapidă a societăţii babiloniene a pretins ţinerea unor evidenţe clare ale resurselor şi distribuţiei de bunuri. De asemenea, a fost necesară dezvoltarea unor instrumente de calcul pentru tranzacţii economice, împărţirea loturilor agricole şi redactarea testamentelor. În acest scop, babilonienii au dezvoltat cea mai sofisticată matematică a acestei epoci. Registrele contabile de pe tăbliţele cuneiforme arată că ei stăpâneau o varietate de artificii matematice şi anticipau, literalmente, algebra mai avansată. Aici mă voi concentra doar asupra apariţiei „ecuaţiilor”, deoarece numai ele sunt relevante pentru istoria teoriei grupurilor. Motivul pentru care am pus cuvântul *ecuaţii* între ghilimele este că babilonienii nu

foloseau acest concept2 în acelaşi fel în care o facem noi astăzi, ci formulau şi rezolvau problemele pe cale retorică, folosind limbajul obişnuit. Cu alte cuvinte, problemele erau rezolvate prin instrucţiuni verbale precise; nu au fost identificate scheme logice sau formule care să indice vreo procedură generală.

Este neîndoielnic că problemele matematice au fost formulate iniţial în contextul nevoii societăţii de a împărţi loturile de pământ. Cuvintele folosite pentru necunoscutele care trebuiau determinate erau *us* (lungime), *sag* (lăţime) şi *aşa* (arie), chiar atunci când nu se efectua nicio măsurare.

Cele mai simple ecuaţii sunt cele *liniare* (ele sunt reprezentate grafic prin linii drepte). Într-o notaţie modernă, acestea sunt ecuaţii de tipul 2 x + 3 = 7, unde *x* reprezintă necunoscuta. A rezolva o ecuaţie înseamnă a găsi valoarea lui *x* pentru care ecuaţia este satisfăcută (în exemplul de mai sus, soluţia este *x* = 2, deoarece 2 X 2 + 3 = 7). Mai multe tăbliţe conţin probleme care pot fi rezolvate prin intermediul ecuaţiilor liniare.

Uneori, pentru a afla răspunsul, trebuia găsită valoarea a doua necunoscute. De exemplu, una dintre probleme cere determinarea lăţimii şi lungimii pentru cazul în care adunând un sfert din lăţime cu lungimea obţinem 7 mâini (o unitate de lungime), iar lungimea cu lăţimea, 10 mâini. Folosind algebra învăţată la scoală, dacă notăm lungimea cu *x* şi lăţimea cu *y*, problema se traduce printr-un sistem de două ecuaţii: 1/4 y ++ x = 7, x + y = 10. Scribul babilonian notează corect că o lungime de 6 mâini (sau 30 de degete, o mână fiind echivalentă cu 5 degete) şi o lăţime de 4 mâini (20 de degete) satisfac ambele ecuaţii (în Anexa 2, prezint cititorului interesat, pe scurt, modul în care se rezolvă asemenea sisteme de ecuaţii.)

Ecuaţiile liniare au apărut încă şi mai proeminent în matematica vechiului Egipt. Aparent, babilonienii le găseau prea elementare pentru a merita o documentare detaliată. Mare parte din cunoştinţele noastre asupra

matematicii egiptene3 provine din fascinantul Papirus Ahmes. Acest imens papirus (lung de aproape cinci metri şi jumătate) este păstrat în prezent la British Museum (cu excepţia câtorva fragmente, descoperite în mod neaşteptat într-o colecţie de lucrări medicale de la Brooklyn Museum). Papirusul a fost cumpărat de egiptologul scoţian Alexander Henry Rhind în 1858 şi, ca urmare, este deseori numit Papirusul Rhind (figura 34). După mărturia scribului Ahmes, el a copiat papirusul cam prin 1650 î.Hr., după un document original care fusese scris cu câteva sute de ani înainte (în timpul domniei faraonului Ammenemes al III-lea din a 12-a dinastie). Papirusul, descris de cercetătorul britanic D'Arcy Thompson ca fiind „unul dintre monumentele ştiinţei antice", conţine 87 de probleme.

Acestea sunt precedate de un tabel cu „reţete" de împărţire şi de o introducere. În introducere, documentul este prezentat oarecum grandilocvent, drept „Intrarea în cunoaşterea tuturor lucrurilor existente şi a tuturor secretelor obscure".

Pe de altă parte, problemele pe Figura 34

care Ahmes le prezintă şi le rezolvă tratează în principal o varietate de chestiuni practice, de la împărţirea echitabilă a pâinilor până la panta piramidelor. Necunoscuta este numită *aha,* care înseamnă „grămadă". De exemplu, problema 26 caută valoarea lui *aha,* dacă suma dintre *aha* şi sfertul său este 15. În notaţie modernă, ecuaţia s-ar formula $x + 1/4\ x = 15$, a cărei soluţie este, aşa cum Ahmes găseşte în mod corect, $x = 12$.

Nu toate problemele din Papirusul Ahmes tratează chestiuni arzătoare ale vremii. Unele erau clar introduse ca exerciţii pentru învăţăcei, şi cel puţin una a fost aleasă pur şi simplu pentru farmecul ei. Problema 79 sună aşa4: „Case 7, Pisici 49, Şoareci 343, Spice de grâu 2401, *Hekati* 16 807, Total 19 607". Evident, un Ahmes jucăuş pune aici o problemă de matematică distractivă, care spune că în fiecare dintre cele şapte case există câte şapte pisici, fiecare mâncând câte şapte şoareci, care, la rândul lor, au mâncat câte şapte spice de grâu, ce ar fi furnizat şapte

hekati (măsuri) de boabe. Necunoscuta căutată în această problemă este totalul, care, fiind suma tuturor caselor, pisicilor, şoarecilor, spicelor şi *hekatilor,* nu are, evident, nicio valoare practică. Mulţi au speculat că această foarte încurcată şaradă s-ar fi metamorfozat peste secole în alte două, foarte cunoscute. În 1202, faimosul matematician italian Leonardo da Pisa (poreclit Fibonacci; a trăit cam între 1170 şi 1240) a publicat o carte intitulată *Liber abaci (Cartea Abacului).* În această carte, el pune următoarea problemă: „Şapte bătrâne călătoresc spre Roma, şi fiecare are şapte catâri. Pe fiecare catâr sunt şapte saci, în fiecare sac sunt şapte pâini, în fiecare pâine sunt şapte bricege şi fiecare briceag are şapte tocuri. Găsiţi totalul lor".

După încă o jumătate de mileniu, în culegerea de cântecele pentru copii din secolul al XVIII-lea, *Mama Gâscă*5 găsim:

Spre St. Ives mergând mai ieri întâlnii şapte muieri.
Fiece muiere căra şapte saci, în fiece sac dormeau şapte mâţe.
Fiecare mâţă avea şapte pui;
Pui, pisici, saci şi muieri.
Câţi mergeau spre St. Ives ieri?

Să fi fost oare acest cântecel inspirat de Papirusul Ahmes, cu peste trei mii de ani mai vechi decât el? Greu de crezut. Dar înainte de a ne îndepărta de subiectul cântecelului, observaţi că, în funcţie de interpretare, răspunsul corect este fie unu (povestitorul; toţi ceilalţi *veneau* de la St. Ives), fie niciunul (povestitorul neaparţinând grupului de „pui, pisici, saci şi muieri"). Seriile geometrice de acest tip, în care fiecare termen succesiv este înmulţit cu acelaşi factor, i-au fascinat dintotdeauna pe oameni. În plus, valorile spirituale au fost asociate cu numărul şapte atât în tradiţia orientală, cât şi în cea occidentală (de exemplu, cele şapte zile ale săptămânii, cei şapte zei ai norocului, din Japonia, cele şapte păcate capitale). Cele trei probleme de enigmistică ar putea să fi fost deci creaţiile independente a trei creiere pline de imaginaţie, despărţite prin secole.

Cunoştinţele legate de rezolvarea ecuaţiilor liniare nu au aparţinut exclusiv Orientului Mijlociu. Impresionanta culegere chinezească *Nouă Capitole asupra Artei Matematice*6 (*Jiu zhang suan shu)* a fost alcătuită cândva între 206 î.Hr. şi 221 d.Hr., fiind bazată pe o alta, încă şi mai veche. În capitolul 8 al ei, găsim probleme conţinând nu mai puţin de trei ecuaţii cu trei necunoscute, toate strălucit rezolvate.

Următoarea treaptă de dezvoltare în ceea ce priveşte complexitatea ecuaţiilor algebrice este reprezentată de *ecuaţiile pătraţice.* Dificultatea suplimentară se datorează faptului că, în asemenea ecuaţii, necunoscuta x apare ridicată la pătrat, ca în $3x2 + x = 4$. Pentru un novice, aceasta poate să nu pară o schimbare radicală, dar în fapt ecuaţiile pătraţice sunt mai dificil de rezolvat decât cele liniare. Oricât de incredibil ar fi, subiectul ecuaţiilor, în general, şi al celor pătraţice, în particular, a devenit în 2003 tema unei dezbateri a parlamentului britanic. Într-un strălucitor discurs asupra programei şcolare, deputatul Tony McWalter7 a explicat:

De ce-ar trebui cineva să fie pasionat de x-ii şi y-ii unui sistem de ecuaţii? Unul dintre răspunsuri este acesta: deoarece, dacă nu face efortul de a vedea ce ascund aceşti *ieşi şi igreci,* îi va fi cu neputinţă să înţeleagă cu adevărat ştiinţa… De ce-ar trebui orice om să încerce să înţeleagă ecuaţiile pătraţice şi principiile care stau în spatele rezolvării lor? Ele străbat întreaga ştiinţă modernă, la fel ca metodele de turnare ale romanilor, au fost cheia artei de care au dat dovadă aceştia în domeniul construcţiilor.

Totuşi, s-ar putea să vă întrebaţi: Dar oare cine au fost primii care s-au izbit de nevoia rezolvării unor astfel de ecuaţii?

Protectorii publicului

În codul ebraic al legilor civile şi canonice – Talmudul – găsim povestea unui exilarh pus să plătească o compensaţie uriaşă. Trebuia să umple cu cereale un grânar cu dimensiunile bazei de 40 pe 40. Disperat, omul s-a dus la rabinul Huna8 (cca. 212 – 297 d.Hr.), capul

Academiei Sura din Babilon, pentru a-i cere sfatul. Învăţatul i-a spus: „Convinge-i să le plăteşti în două rate: acum o suprafaţă de 20 pe 20, iar ceva mai târziu alţi 20 pe 20, şi vei câştiga o jumătate”. Aria unui pătrat cu latura de 40 de unităţi este, fireşte, de 40 X 40 = 1 600 de unităţi pătrate, în vreme ce suma ariilor a doua pătrate cu latura de 20 de unităţi este de numai 800 de unităţi pătrate. Rabinul Huna se foloseşte aici de o greşeală obişnuită în timpul Antichităţii – ideea că aria unei figuri depinde numai de perimetru. Istoricul grec Polibiu9 (cca. 207 – 125 î.Hr.), bunăoară, ne povesteşte că mulţi oameni din vremea sa refuzau să creadă că Sparta, cu un zid înconjurător de 48 de stadii[4], putea să aibă o suprafaţă dublă faţă de Megalopolis, cu un perimetru de 50 de stadii. Figura 35 demonstrează simplu că o figură cu un perimetru mai mic poate avea arie mai mare. Dreptunghiul alungit are un perimetru de 2 X (100 + 10) = 220 de unităţi şi o arie de 100 X 10 = 1.000 de unităţi pătrate. Dreptunghiul mai scurt are un perimetru mai mic, 2 X (50 + 40) = 180 de unităţi, dar arie dublă, 50 X 40 = 2000 de unităţi pătrate. Matematicianul grec Proclus (410 – 485 d.Hr.) relata că până şi în secolul al V-lea membrii anumitor comunităţi îşi păcăleau concetăţenii, dându-le terenuri cu perimetru mai mare, dar arie mai mică decât cele pe care şi le alegeau pentru ei. Pentru a adăuga şi minciuna la răul făcut, aceşti impostori îşi foloseau şmecheria pentru a-şi câştiga renumele de oameni generoşi.

Să examinăm o clipă pe ce se bazează confuzia dintre perimetru şi arie. Să presupunem că avem un dreptunghi cu perimetrul de 18 unităţi. Dacă notăm lungimea sa cu x, iar lăţimea cu *y*, atunci $x + y = 9$ (perimetrul fiind egal cu suma dintre dublul lungimii şi al lăţimii). Să mai presupunem că aria este de 20 de unităţi pătrate. Aceasta înseamnă că $xy = 20$ (aria este produsul dintre lungime şi lăţime). Avem, deci, un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

---

4 In Grecia antică, unitate de măsură variabilă, de 177,6 până la aproximativ 192,3 metri *(n. r.)*.

$x + y = 9$ $xy = 20$.

O cale directă de rezolvare a acestui sistem ar fi prin izolarea necunoscutei y din prima ecuaţie (scăzându-l pe x din ambii membri), $y = 9 - x$, şi înlocuirea acestei expresii a lui y în cea de a doua ecuaţie, $x (9 - x) = 20$. Dacă desfacem acum paranteza din membrul stâng, obţinem $9x - x^2 = 20$. Multe probleme babiloniene ce conduc la ecuaţii pătraţice au, în mare, această formă generală. De exemplu, a doua problemă de pe tăbliţa numărul 13 901 de la British Museum10 spune: „Am scăzut latura din aria pătratului meu. 870". Aceasta corespunde ecuaţiei pătraţice $x^2 - x = 870$. Una dintre ipoteze este deci că ecuaţiile pătraţice au apărut ca o încercare a conştiincioşilor babilonieni de a proteja populaţia de impostori şi de şmecheriile hoţilor de terenuri. Dar cum au descoperit matematicienii lor metoda de rezolvare a ecuaţiilor pătraţice rămâne un mister, dat fiind că babilonienii descriu totdeauna cu multe detalii paşii procedeului de găsire a soluţiei, fără a ne spune însă niciodată cum au inventat procedeul.

Vechii egipteni nu puteau rezolva decât cea mai simplă dintre ecuaţiile pătraţice, de tipul $x^2 = 4$, dar nu şi ecuaţii „mixte", care îl conţineau atât pe x, cât şi pe x^2. Care este soluţia ecuaţiei $x^2 = 4$? Ea este rădăcina pătrată a lui 4, notată $\sqrt{4}$. Un răspuns evident este 2, dat fiind că $2 \times 2 = 4$. Aceasta era tot ceea ce-i interesa pe egipteni, căci numărul trebuia să reprezinte cantităţi, precum lungimile sau numărul de pâini, aşa că nu putea fi decât pozitiv. În fapt, ecuaţia $x^2 = 4$ admite însă şi o a doua soluţie, mai puţin evidentă: -2. Atunci când un număr negativ se înmulţeşte cu un alt număr negativ, rezultatul este un număr pozitiv. Cu alte cuvinte, $(-2) \times (-2) = 4$, deci ecuaţia $x^2 = 4$ are două soluţii: $x = 2$ şi $x = -2$. Aceasta e prima indicaţie a faptului că ecuaţiile pătraţice pot avea două soluţii diferite, nu una singură. Deşi babilonienii se pricepeau să rezolve ecuaţii pătraţice, ei nu erau încă interesaţi decât de soluţiile pozitive, deoarece necunoscutele tipice erau lungimile. Ei evitau, de asemenea, cazurile în care puteau fi găsite două soluţii

pozitive diferite, acestea părându-li-se, pesemne, absurdităţi ilogice.

În ciuda superbelor lor talente matematice, primii greci s-au concentrat în primul rând la geometrie şi logică, nedând prea multă atenţie algebrei. Percepţia clară a numărului şi formei drept două aspecte diferite ale aceluiaşi domeniu matematic a trebuit să aştepte strălucitele minţi matematice ale secolului al XVII-lea î.Hr. Marele Euclid din Alexandria, a cărui monumentală operă *Elementele* (publicată în jur de 300 î.Hr.) a pus bazele geometriei, tratează doar indirect ecuaţiile pătraţice. El rezolvă ecuaţiile pe cale geometrică, formulând metode de găsire a lungimilor, care sunt, de fapt, soluţii ale unor ecuaţii pătraţice. Câteva secole mai târziu, matematicienii arabi aveau să dezvolte mai mult acest tip de algebră geometrică11.

Părinţii algebrei

Marea scoală grecească din Alexandria a produs mulţi matematicieni eminenţi, pe parcursul a două epoci de aur. În ciuda multor suişuri şi coborâşuri, şcoala ei (numită Muzeul) şi biblioteca asociată, vestită pentru păstrarea a circa şapte sute de mii de volume (multe dintre ele confiscate de la turişti ghinionişti), au dăinuit timp de aproape şapte sute de ani. Unul dintre cei mai originali gânditori ai Alexandriei a fost Diofant12, cel supranumit uneori „părintele algebrei”. Detaliile vieţii lui Diofant sunt atât de învăluite în mister, încât nu ştim cu certitudine nici măcar în ce secol a trăit, în afara faptului că trebuie să fi activat aproximativ după anul 150 î.Hr. (dat fiind că îl citează pe matematicianul Hypsicles, care a trăit cam între 180 şi 120 î.Hr.) şi ceva mai devreme de 270 î.Hr. (deoarece el este menţionat de Anatolius, episcopul din Laodicea, care a intrat în funcţie cam prin acest an). În general, se presupune că el a ajuns în culmea gloriei în jurul anului 250 î.Hr., deşi posibilitatea să fi trăit cu un secol înainte nu poate fi exclusă. Ştim despre ingenioasa operă a lui Diofant din principalul său tratat, *Aritmetica,* constituit iniţial din treisprezece volume. Numai şase

dintre acestea, scrise în limba greacă, au supravieţuit atacului declanşat de musulmani în secolul al VII-lea asupra bibliotecii din Alexandria. O traducere arabă a ceea ce ar putea fi alte patru volume (atribuită matematicianului Qusta Ibn Luqa din secolul al IX-lea) a fost descoperită în mod miraculos în 1969.

În ciuda titulaturii de „părinte al algebrei", cea mai mare parte din *Aritmetica* se ocupă de fapt cu probleme de teoria numerelor. Cu toate acestea, Diofant reprezintă în mod cert un punct de cotitură în evoluţia algebrei, între stilul pur retoric al babilonienilor şi formele simbolice ale ecuaţiilor (de ex., 2X2 + *x* = 3) pe care le folosim noi astăzi. În 1463, matematicianul şi astronomul german Johannes Regiomontanus nu-şi ascundea admiraţia13 pentru *Aritmetica* lui Diofant: „În aceste vechi cărţi se ascunde floarea întregii aritmetici, *ars rei et census* (arta „lucrului" şi a enumerării; cu referire la ecuaţii cu necunoscute şi la aritmetică), căreia noi îi dăm astăzi denumirea arabă de algebră". Diofant a demonstrat o incredibilă creativitate şi pricepere în soluţionarea multor probleme. Totuşi, el lua în considerare numai răspunsuri pozitive, iar dintre acestea, numai cele care puteau fi exprimate fie ca numere întregi (precum 1, 2, 3...), fie ca fracţii (precum 2/3, 4/9, 5/13; împreună, numerele întregi şi fracţiile sunt cunoscute ca fiind *numere raţionale).* Ca un exemplu de ingeniozitate dat de Diofant, consideraţi problema a 28-a din primul său volum14: „Găsiţi două numere aşa încât suma lor şi suma pătratelor lor să fie nişte numere date". Evident, aceasta este o problemă cu două necunoscute (cele două numere). Totuşi, Diofant a reuşit printr-un truc ingenios să reducă numărul necunoscutelor de la două la una şi, astfel, şi întreaga problemă, la o ecuaţie simplă. (Pentru cititorul interesat, soluţia lui Diofant este prezentată în Anexa 3.) *Aritmetica* dovedeşte cât se poate de limpede că Diofant se pricepea să rezolve ecuaţii pătraţice de cele trei tipuri: ax2 + *bx* = *e* (unde *a, b, e* sunt numere pozitive date, ca în 2 x2 + 3 x = 14); ax2 = *bx* + *e*; şi ax2 +*e* = *bx.* Acestea au fost exact

tipurile de ecuaţii reluate în considerare de matematicienii arabi cu peste cinci secole mai târziu.

Diofant este cunoscut mai ales datorită unei categorii speciale de ecuaţii, care-i poartă numele – ecuaţiile diofantice –, precum şi datorită extrem de neobişnuitului său epitaf. Ecuaţiile diofantice sunt cu adevărat ciudate prin aceea că, aparent, sunt satisfăcute de orice număr. Să considerăm de pildă ecuaţia 29 x + 4 = 8 y. Care valori ale lui *x* o satisfac? Dacă alegem, să zicem, *y* = 5, obţinem *x* = 36/29. Dacă alegem *y* = 1, obţinem *x* = 4/29 etc. Îi putem da lui y o infinitate de valori şi, orice valoare am alege, putem găsi un *x* corespunzător, care satisface ecuaţia. Ceea ce dă nota caracteristică a ecuaţiilor diofantice este că, de fapt, se caută ca ambele soluţii *x, y* să fie întregi (numere precum 1, 2, 3...). Aceasta limitează imediat posibilităţile şi le face mult mai greu de găsit. Puteţi descoperi o soluţie pentru ecuaţia diofantică de mai sus? (Dacă nu, o găsiţi în Anexa 4.)

Cea mai celebră ecuaţie diofantică din istorie este cea cunoscută prin intermediul Marii Teoreme a lui Fermat15 – celebra afirmaţie a lui Pierre de Fermat (1601 – 1655) – că nu există soluţii în numere întregi ale ecuaţiei *xn + yn = zn,* unde *n* este orice număr mai mare decât 2. Atunci când *n* = 2, există multe soluţii (în fapt, o infinitate). De exemplu, 32 + 42 = 52 (9 + 16 = 25); sau 122 + 52 = 132 (144 + 25 = 169). În mod miraculos, când trecem de la *n* = 2 la *n* = 3, nu există niciun triplet de numere întregi *x, y, z* care să satisfacă ecuaţia x3 + y3 = z3, lucru adevărat pentru orice valoare a lui *n* mai mare decât 2.

Într-o manieră cât se poate de potrivită, marginea celui de-al doilea volum al *Aritmeticii,* pe care Fermat îl citea cu nesaţ, a fost locul unde el şi-a notat extraordinara sa afirmaţie – pentru a cărei demonstrare a fost nevoie de nu mai puţin de 356 de ani.

O culegere din secolul al VI-lea, cunoscută sub numele de *Antologia Greacă,* conţine în jur de şase mii de epigrame. Una dintre ele se presupune că ar face un

succint rezumat al vieţii lui Diofant:

Divinitatea îi hărăzi să fie un copil pentru a şasea parte a vieţii sale şi, adăugând la aceasta o a douăsprezecea parte, îi îmbrăcă obrajii în puf; îi aprinse lumânările căsătoriei după a şaptea parte, iar cinci ani mai târziu îi dărui un fiu. Vai! sărmanul copil născutu – s-a târziu; când împlini măsura jumătăţii vieţii părintelui său, Soarta cea rece-l răpi. După ce-şi mângâie jalea timp de patru ani cu ştiinţa numerelor, viaţa-şi sfârşi.

Diofant însuşi a fost probabil jignit cumva de faptul că povestea întregii sale vieţi a fost redusă la o simplă ecuaţie lineară, de un tip care pe el nu-l interesase niciodată. Dacă descrierea este corectă, a trăit până la 84 de ani.

Ştiind că matematicienii babilonieni, greci şi, în particular, cei hinduşi ai secolului al VII-lea ştiau deja să rezolve ecuaţii pătraţice de diverse tipuri, n-ar trebui să ne surprindă că ele fac astăzi parte din algebra elementară. Cea mai generală formă a unei ecuaţii pătraţice este: $ax1 + bx + e = 0$, unde a, b, e pot fi orice numere date (doar a nu poate fi zero, deoarece ecuaţia n-ar mai fi pătraţică). Adevărata întrebare este dacă există vreo reţetă sau formulă universală pe care ne putem baza pentru a găsi de fiecare dată soluţiile. S-ar putea să vă mai amintiţi din liceu că o astfel de formulă chiar există. Ea este:

— $B \pm V b$ 2 – 4 ac

2 a

În ciuda aspectului oarecum deconcertant, formula este simplă;

atunci când substituim în ea valorile date pentru $a, b, e,$ ne furnizează imediat valorile lui x care satisfac ecuaţia. De exemplu, să presupunem că avem de rezolvat ecuaţia: $x2 – 6 x + 8 = 0$, în care $a = 1, b = – 6, e = 8$. Tot ceea ce avem de făcut este să dăm aceste valori constantelor $a, b,$ şi e din formulă şi găsim cele două soluţii posibile: $x = 2$ sau $x = 4$ (simbolul ± din formulă spune să alegem plus pentru a obţine o soluţie şi minus pentru a o obţine pe cealaltă).

După declinul şi căderea şcolii din Alexandria,

matematica europeană a părut să fi intrat în hibernare timp de aproape un mileniu. Rolul menţinerii în viaţă a matematicii, şi a ştiinţei în genere, a fost preluat de India şi de lumea arabă. Ca urmare, calea de la Diofant la rezolvarea modernă a ecuaţiilor pătraţice trece pe la matematicieni neeuropeni. Matematicianul şi astronomul indian Brahmagupta16 (589 – 670) a reuşit să rezolve câteva ecuaţii diofantice impresionante, precum şi nişte ecuaţii pătraţice care conţineau pentru prima dată numere negative. Pe acestea, el le-a numit „datorii", realizând faptul că numerele negative apar cel mai frecvent în tranzacţii monetare. În acelaşi spirit, cele pozitive au primit denumirea de „averi". Regulile de înmulţire sau împărţire a numerelor pozitive şi negative au fost, deci, formulate astfel: „Produsul sau raportul a două datorii este o avere; produsul sau raportul dintre o datorie şi o avere este o datorie". Cel care literalmente i-a dat algebrei numele pe care-l poartă acum a fost Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi17 (cca. 780 – 850; în figura 36 îl puteţi vedea reprezentat pe un timbru sovietic). Cartea scrisă de el la Bagdad – *Kitab al-jabr wa al-muqabalah (Cartea condensată a restaurării şi balanţei)* – a fost timp de secole sinonimă cu teoria ecuaţiilor. De la unul dintre cuvintele din titlul ei *(al-jabr)* provine termenul de „algebră". Chiar şi cuvântul

„Algoritm", folosit pentru a descrie orice metodă specială de rezolvare a unei probleme prin urmarea unei succesiuni de paşi procedurali, a rezultat dintr-o distorsionare a numelui lui al-Khwarizmi. Chiar dacă, prin conţinutul ei, cartea sa nu avea deosebita calitate de a fi o deschizătoare de drumuri, ea a fost prima care a expus într-o manieră sistematică procedeul de rezolvare a unei ecuaţii pătraţice. Cuvântul *al-jabr,* însemnând „restaurare" sau „completare" se referea la mutarea termenilor negativi dintr-un membru al ecuaţiei în celălalt, ca atunci când transformăm ecuaţia x2 = 40 x – 4 x2 (adăugând 4 x2 în ambii membri) în 5 x2 = 40 x. Atât de mare a fost influenţa cărţii lui al-Khwarizmi, încât şi opt sute de ani mai târziu,

în măiestritul burlesc al celebrului roman cavaleresc *Don Quijote de la Mancha,* descoperim că felcerul este numit *algebrista,* datorită meseriei sale de „restaurator" de oameni.

Prima carte care conţinea rezolvarea completă a celei mai generale ecuaţii pătraţice a apărut în Europa, abia în secolul al XII-lea. Autorul era matematicianul eclectic Abraham bar Hiyya Ha-nasi18 (1070 – 1136; „Ha-nasi" înseamnă „şeful"), de origine hispano-ebraică. Ca pentru a ne reaminti de originile timpurii ale ecuaţiilor pătraţice, cartea se intitula: *Hibbur ha-meshihah ve-ha-tishboret* (*Tratat despre Măsurare şi Calcul*). Abraham bar Hiyya explică:

Cel ce-şi doreşte să înveţe corect cum să măsoare ariile şi cum să le împartă, acela trebuie să priceapă temeinic teoremele generale ale aritmeticii şi geometriei, pe care se bazează predarea… măsurării. Dacă a stăpânit pe de-a-ntregul aceste idei, nu poate… nicicând devia de la adevăr.

Aceasta încheie o lungă epocă, în care matematicienii arabi au jucat rol de paznici de încredere ai matematicii. Progresul înregistrat în cei trei mii de ani care au urmat perioadei vechiului Babilon a constat doar în creşteri cantitative. Odată cu extraordinara trezire intelectuală a Renaşterii, centrul de greutate avea însă să se deplaseze spre nordul Italiei, urmat curând şi de alte ţări din vestul Europei. Umaniştii au descoperit lucrările Antichităţii greceşti şi au încurajat procesul de investigare a întregii lor cunoaşteri, inclusiv a matematicii. Pe măsură ce copierea de manuscrise se transforma într-o industrie importantă (după una dintre relatări, influentul bancher florentin Cosimo de Medici folosea 45 de scribi), inventarea tiparului cu litere mobile nu putea fi decât anticipată, împreună cu proliferarea cunoaşterii ştiinţifice care a rezultat din ea.

Istoria liniştită şi oarecum inertă a ecuaţiei pătraţice nu semnala că următorul stadiu în rezolvarea ecuaţiilor avea să fie deosebit de dramatic. Capitolul următor era pe

punctul de a începe.

Cubica

Aşa cum problemele legate de arii conduc la ecuaţii pătraţice (deoarece o distanţă se înmulţeşte cu alta, rezultând o distanţă la pătrat) calculul volumelor unor corpuri, precum cubul (unde lungimea este înmulţită cu lăţimea şi cu înălţimea), conduce la *ecuaţii cubice.* Formula generalizată a ecuaţiei cubice are forma *ax? + bx2 + ex + d* = 0, unde *a, b, e,* ci sunt orice numere date (cu excepţia lui *a,* care trebuie să fie diferit de zero). Scopul tuturor amatorilor de ecuaţii era clar: să găsească o formulă, analogă cu cea pentru ecuaţia pătraţică, care, substituind valorile lui *a, b, e, d,* să dea soluţiile dorite. Vechii babilonieni creaseră nişte tabele care le permiteau să rezolve câteva ecuaţii particulare de acest gen, iar poetul-matematician persan Omar Khayyam 19 a prezentat soluţii geometrice ale altor câtorva, în secolul al XII-lea. Cu toate acestea, rezolvarea formulei generalizate a ecuaţiei cubice i-a sfidat pe matematicieni până în secolul al XVI-lea. Nu fiindcă încercările ar fi lipsit. Faimoşii algebristi florentini Maestro Benedetto, în secolul al XV-lea, şi cei doi predecesori ai săi din secolul al XIV-lea, Maestro Biaggio şi Antonio Mazzinghi20, au pus un zel considerabil în a pricepe ecuaţiile şi soluţiile lor. Eforturile lor s-au dovedit însă insuficiente în ce priveşte cubica. Un alt matematician al secolului al XIV-lea, Maestro Dardi21 din Pisa, a prezentat şi el nu mai puţin de 198 de soluţii pentru diferite tipuri de ecuaţii – dar nu pentru formula generalizată a cubicei. Chiar şi celebrul pictor renascentist Piero della Francesca, ce era şi un talentat matematician, şi-a adus contribuţia la încercările de a găsi o soluţie. În ciuda acestor eforturi şi a altora la fel de susţinute, răspunsul se lăsa aşteptat. Nu-i de mirare că matematicianul şi autorul Luca Pacioli22 (1445 – 1517) îşi încheia în 1494 importanta sa carte *Summa de arithmetica, geometria, proporţioni e proporţionalita (însumarea cunoştinţelor despre aritmetică, geometrie, proporţie siproporţionalitate)* pe un ton defetist. „Pentru

ecuaţiile cubică şi cuartică (conţinând pe x4)", spunea el, „până acum n-a fost posibilă formarea de reguli generale". Vestea bună era că enciclopedica lucrare de şase sute de pagini a lui Pacioli era scrisă în accesibila limbă italiană. Ca urmare, ea a promovat studiile algebrice şi printre necunoscătorii limbii latine. Din acest moment, interesul practic a făcut loc ambiţiei. Nimeni nu căuta soluţiile cubicei pentru vreun scop practic. Rezolvarea ecuaţiei devenise o provocare intelectuală demnă de a fi luată în seamă de cele mai strălucite minţi matematice. Acesta a fost contextul în care şi-a făcut intrarea în scenă un erou modest – un matematician din Bologna, numit Scipione dal Ferro23 (1465 – 1526) –, care, fără să ştie, a devenit parte a unei drame în curs.

Scipione dal Ferro era fiul unui producător de hârtie, Floriano, şi al soţiei acestuia, Filippa. În secolul care asistase la inventarea maşinii de tipărit, producţia de hârtie deveni o meserie căutată. Puţine lucruri se ştiu despre tinereţea lui Scipione şi despre ceea ce l-a îndemnat să studieze matematica. El şi-a completat, probabil, educaţia la Universitatea din Bologna.

Această prestigioasă instituţie, cea mai veche universitate aflată încă în funcţie în ziua de astăzi (figura 37 arată un impunător coridor al primei clădirii construite, care găzduieşte actualmente o bibliotecă), a fost înfiinţată în 1088, iar în secolul al XV-lea şi-a câştigat renumele de a fi una din cele mai bune din Europa. Matematica (depăşind graniţele geometriei fundamentale euclidiene) făcuse parte din *curriculum* la Bologna încă de la finele secolului al XIV-lea, iar în 1450 Papa Nicolaus al V-lea adăugase corpului profesoral patru posturi de matematicieni. În 1496, dal Ferro a devenit unul dintre cei patru titulari ai catedrei de matematică a universităţii şi, în afara unui scurt concediu petrecut la Veneţia, a continuat să activeze pe acest post până la sfârşitul zilelor sale. Deşi mai multe surse îl descriu ca fiind un mare algebrist, din opera sa n-a supravieţuit nicio lucrare – nici sub formă de manuscris, nici de tipăritură. O culegere de note de curs de la

Universitatea din Bologna, datată 1554 – 1568, s-ar putea să includă o copie a scrierilor lui dal Ferro (figura 38). Pasajul este intitulat: „De la *Cavaliere* Bolognetti, care-l avea de la maestrul bolognez de odinioară, Scipione dal Ferro". Probabil că Scipione l-a întâlnit pe Luca Pacioli în 1501, pe când acesta ţinea cursuri la Bologna.

1$
p«-*%u ŢTmmr*
— «» – ««iMft «. *$%/*W* ««w/***tra /<*«**a., t** «/C – *r – d*
1 „y-i/ 7" «*f—".*
— RUjfă Ţţ nrr.
* * *
A/. mW Ui /3

Pacioli nu era o somitate în domeniu, dar ştia să transmită cunoştinţele matematice. Frustrat de neputinţa de a rezolva ecuaţia cubică, Pacioli l-a convins, poate, pe dal Ferro – care avea o mare îndemânare în manipularea expresiilor ce conţin rădăcini de ordinul trei şi doi – să încerce el însuşi. Cam prin anul 1515, eforturile lui dal Ferro au dat, în sfârşit, roade. El a dat o mare lovitură, reuşind să rezolve ecuaţia cubică de forma ax3 *+ bx = c.* În limbajul matematic al secolului al XVI-lea, asemenea ecuaţii erau descrise drept „necunoscute şi cuburi egale cu numere". Deşi ecuaţia nu era sub forma generalizată, ea deschidea drumul pentru descoperirile ce aveau să urmeze. Scipione dal Ferro nu s-a grăbit să-şi publice rezultatul epocal. Ţinerea sub tăcere a descoperirilor matematice a fost ceva obişnuit până în secolul al XVIII-lea (ce deosebire faţă de goana actuală după publicaţii ştiinţifice!). Cu toate acestea, el a divulgat soluţia elevului şi ginerelui său, Annibale della Nave, şi cel puţin unui alt student, veneţianul Antonio Maria Fiore. El şi-a expus, de asemenea, metoda într-un manuscris ajuns, postmortem, în posesia ginerelui său.

Bologna secolului al XVI-lea cunoştea o creştere a interesului pentru matematică. Matematicienii şi alţi învăţaţi erau implicaţi uneori în dezbateri şi dispute publice care atrăgeau mari mulţimi de oameni. Asistenţa

nu cuprindea numai oficiali universitari şi judecători desemnaţi, ci şi studenţi, susţinători ai adversarilor, şi spectatori veniţi doar pentru a se amuza sau a face pariuri. De multe ori, opozanţii înşişi pariau mari sume de bani pe victoria pe care şi-o anticipau. După descrierea unui istoric al matematicii din secolul al XIX-lea, matematicienii erau interesaţi de asemenea confruntări24 ale minţilor deoarece de rezultatele acestora depindea nu numai reputaţia lor în oraş sau în universitate, ci şi menţinerea postului, eventual creşterea salariului. Disputele aveau loc în pieţe publice, biserici şi la curţile unor nobili sau principi, care socoteau o onoare să numere în suita lor savanţi pricepuţi nu doar la preziceri astrologice, ci şi la dispute asupra unor probleme matematice dificile şi rare.

Antonio Maria Fiore, care fusese iniţiat în secretul soluţiei lui dal Ferro, era un matematician mediocru. După moartea lui dal Ferro, nici el nu a publicat soluţia imediat (chiar dacă o trata ca şi cum el ar fi fost cel ce se cuvenea s-o exploateze), ci s-a hotărât să aştepte momentul potrivit – unul care să-i îngăduie să-şi facă un renume. Într-o societate în care reînnoirea numirilor la universitate depindea în mare măsură de succesul în dezbateri, posesiunea unei arme secrete putea face diferenţa între supravieţuire şi pieire. Ocazia s-a ivit în cele din urmă în 1535, iar Fiore l-a provocat pe matematicianul Niccolò Tartaglia la un concurs public de rezolvări de probleme. Cine era acest Tartaglia şi de ce l-a ales pe el Fiore dintr-o lungă listă de oponenţi potenţiali?

Niccolò Tartaglia25 (figura 39) se născuse în Brescia, în 1499 sau 1500. Adevăratul său nume de familie era Fontana, dar fusese poreclit Tartaglia (adică „bâlbâitul”), datorită unor tăieturi de sabie la gură, căpătate la vârsta de doisprezece ani de la un soldat francez. Băieţaşul fusese crezut mort în catedrala în care îşi căutase refugiul, dar îngrijirile mamei sale îl readuseseră la viaţă. Ca adult, purtase mereu barbă, pentru a-şi ascunde cicatricile care-l desfigurau. Tartaglia provenea dintr-o familie foarte săracă. Tatăl său, Michele, un curier poştal, murise când

Niccolò avusese în jur de şase ani, lăsând-o pe văduvă şi pe copiii ei într-o sfâşietoare mizerie. Tartaglia fusese nevoit să-şi întrerupă lecţiile de scris şi citit la litera *k*, deoarece familia lui nu mai avusese cu ce să-i plătească tutorele. În retrospectiva de mai târziu, el şi-a descris astfel terminarea studiilor: „Nu m-am întors niciodată la un tutore, dar am continuat să studiez singur operele unor oameni morţi, însoţit doar de fiica Sărăciei, care se numeşte Sârguinţă”. În ciuda acestor circumstanţe nefavorabile, Tartaglia s-a dovedit a fi un matematician talentat. În cele din urmă, în 1534, s-a mutat la Veneţia ca profesor de matematică, după ce petrecuse ceva vreme la Verona. În memoriile sale matematice, Tartaglia afirmă că în 1530 a reuşit, după eforturi considerabile, să rezolve ecuaţia x3 + 3 x2 = 5. Aceasta fusese o provocare ce-i fusese lansată de către concetăţeanul său din Brescia, Zuanne de Tonini da Coi. Zvonurile despre pretenţia lui Tartaglia26, că ar fi capabil să rezolve cubicele, trebuie să fi ajuns la urechile lui Antonio Maria Fiore, dar acesta din urmă a primit informaţia cu scepticism, crezând că Tartaglia o face pe grozavul. Convins că datorită cunoaşterii secretului soluţiei lui dal Ferro îl poate învinge, Fiore l-a provocat. Puţin timp mai târziu, ei doi au ajuns la o înţelegere asupra condiţiilor precise ale disputei.

Fiecare parte avea să propună spre rezolvare oponentului său 30 de probleme. Problemele urmau să fie sigilate şi depuse la notarul *Maestro* Per Iacomo di Zambelli. După ruperea sigiliilor, cei doi concurenţi aveau un termen de 40 până la 50 de zile pentru rezolvarea lor. Ei au căzut de acord ca acela care va rezolva mai multe probleme să fie socotit învingător şi, pe lângă onoruri, să primească o frumoasă recompensă pentru fiecare problemă (după anumite surse, cel care pierdea urma să suporte cheltuielile unei serbări la care ar fi participat câştigătorul şi treizeci de prieteni ai săi). După cum a reieşit, Fiore nu avea decât o singură săgeată pentru arcul său – toate problemele pe care le propusese erau de forma ax3 + *bx* = *e* pentru care cunoştea soluţia de la dal Ferro.

Pe de altă parte, lista lui Tartaglia cuprindea 30 de probleme diferite, fiecare de alt tip, „pentru a arăta că-l stimam prea puţin şi n-aveam niciun motiv să-mi fie frică de el” (ca să-i folosesc cuvintele).

Data fixată a concursului a fost 12 februarie 1535. Diverşi demnitari universitari şi o parte din înalta societate intelectuală a Veneţiei au asistat, probabil, la el. Când problemele au fost prezentate celor doi adversari, s-a întâmplat ceva cu totul neaşteptat. Spre uimirea asistenţei, Tartaglia a dat de capăt tuturor problemelor care-i fuseseră propuse în numai două ore! Iar Fiore nu a reuşit să rezolve niciuna dintre problemele lui Tartaglia. Aproximativ douăzeci de ani mai târziu, vorbind despre acest eveniment, Tartaglia îşi amintea:

Motivul pentru care am fost în stare să-i rezolv cele 30 de probleme într-un interval atât de scurt a fost că toate 30 erau legate de algebra necunoscutelor şi a cuburilor egale cu numere (ecuaţii de forma ax3 + *bx* = c). [Făcuse aceasta] crezând că eu nu voi fi în stare s-o rezolv pe niciuna din ele, deoarece Fra Luca [Pacioli] afirmă în tratatul său că e imposibil să rezolvi asemenea ecuaţii printr-o regulă generală. Dar, printr-un noroc, cu numai opt zile înainte de data fixată pentru a ridica de la notar cele 30 de probleme sigilate, descoperisem regula generală pentru asemenea expresii.

De fapt, la o zi după ce descoperise soluţia pentru *ax*3 *++ bx = e,* Tartaglia o descoperise şi pe cea a ecuaţiei *ax + b =* x3. Cum ştia deja să rezolve x3 + ax2 = *b* (provocarea pe care i-o lansase da Coi), el devenise peste noapte, literalmente, expert mondial în rezolvarea de ecuaţii cubice. Cu toate acestea, a refuzat sugestia lui da Coi de a-şi publica de îndată soluţia, explicând că avea de gând să scrie o carte pe această temă. Formulele descoperite de Tartaglia erau atât de complicate, încât i se părea greu să-şi ţină minte propriile sale reguli pentru cele trei cazuri. Ca să nu le uite, a compus câteva versuri care începeau cu:

Atunci când cubul şi necunoscuta împreună fac un

număr întreg, cunoscut:

Găseşte-ntâi două numere diferind la fel;

Produsul lor, atunci, ca şi faima lor comună…

Atât versurile complete ale lui Tartaglia, cât şi formula sa sunt prezentate în Anexa 5.

Tartaglia nu mai era acum un profesor anonim de matematică – era o celebritate. Dar în Italia renascentistă, nicio poveste, nici măcar una matematică, nu lua naştere fără a trece prin momente melodramatice.

Intriga se complică

Vestea despre întrecerea dintre Tartaglia şi Fiore s-a răspândit ca vântul prin toată Italia, ajungând la urechile uneia dintre cele mai strălucite şi controversate figuri ale secolului al XVI-lea – fizicianul, matematicianul, astrologul, cartoforul şi filosoful Gerolamo Cardano27 (1501 – 1576; figura 40).

Chiar prin comparaţie cu numeroasele genii pline de culoare ale Renaşterii, viaţa lui Cardano frapează imediat imaginaţia. Era fiul nelegitim al avocatului milanez Fazio Cardano şi al mult mai tinerei văduve Chiara Micheri. În autobiografia sa de mai târziu, *De vita propria liber (Cartea vieţii mele),* Cardano se delectează descriindu-şi cu multe şi inutile detalii toate problemele medicale din prima parte a vieţii, inclusiv impotenţa sexuală de care suferise între 21 şi 31 de ani. Încurajat de cultivatul său tată, care în mai multe ocazii l-a consiliat pe Leonardo da Vinci în probleme de geometrie.

Gerolamo a studiat matematica, clasicii antici şi medicina la universităţile din Pavia şi Padova. În zilele de studenţie, jocurile de noroc i-au fost principala sursă de sprijin financiar. A jucat zaruri, cărţi şi şah, transformându-şi în profit cunoştinţele de teoria probabilităţilor. Ulterior, avea să-şi transforme dependenţa de joc într-un volum interesant: *Liber de Iudo aleae (Cartea despre jocurile de noroc)* – cea dintâi lucrare de teoria probabilităţilor. Având un glas foarte puternic şi o atitudine agresivă, Cardano a reuşit să se certe cu mulţi profesori, iar la sfârşitul studiilor, prima comisie i-a refuzat

titlul de doctor în medicină, cu votul covârşitor de 47 contra 9. Doar după încă două runde de vot a reuşit să obţină titlul. Apoi primele încercări de a ocupa un post de medic la Milano au eşuat lamentabil, dar curând norocul i s-a schimbat radical. În 1534, prin influenţa cunoscuţilor tatălui său, a fost numit profesor de matematică la Fundaţia Piatti. Simultan, a început să practice clandestin medicina, dând dovadă că este extrem de eficient. Succesul nu i-a câştigat, totuşi, sprijinul Colegiului Medicilor din Milano. În 1536, Cardano s-a hotărât să transforme această dispută într-un spectacol, publicând o carte extrem de agresivă – *De malo recentiorum mediocrum medendi usu libellus (Despre malpracticile recente ale medianei de uz curent)*. În particular, el ridiculiza manierele grandilocvente ale medicilor vremii sale: „Lucrurile care sporesc reputaţia unui medic în zilele noastre sunt manierele lui, servitorii, trăsura, hainele, eleganţa şi aerele, toate afişate într-o manieră artificială şi insipidă; cunoştinţele şi experienţa par să nu conteze deloc”. Oricât de incredibil ar părea, această ofensivă i-a asigurat lui Cardano un post de medic, iar spre mijlocul secolului, el avea să devină unul dintre cei mai bine-cunoscuţi practicieni europeni, depăşit numai de legendarul anatomist Andreas Vesalius.

După toate aparenţele, competiţiile şi controversele îi priau lui Cardano. Aceasta provenea, poate, din pasiunea lui pentru jocuri de noroc. El a notat cândva: „Chiar dacă jocul ar fi din toate privinţele28 un rău, ţinând seama de numărul foarte mare al celor care joacă, el ar părea să fie un rău natural. Din acest motiv, ar trebui analizat de un doctor în medicină, ca şi cum ar fi o boală incurabilă”. Plin de duh şi cu limbă ascuţită, Cardano a câştigat multe dispute, atât în timpul anilor de studenţie, cât şi ca savant matur. Nu-i de mirare că veştile despre disputa Tartaglia-Fiore i-au aprins curiozitatea. Pe atunci, lucra la cea de-a doua carte matematică a sa, *Practica arithmeticae generalis et mensurandi singularis (Practica aritmeticii generale şi a măsurării simple),* iar ideea de a include în

aceasta soluţia cubicei i s-a părut deosebit de atrăgătoare. În cei câţiva ani care au urmat, Cardano a încercat probabil zadarnic să descopere singur soluţia. Dând greş, s-a hotărât să-l trimită la Tartaglia pe vânzătorul de cărţi Zuan Antonio da Bassano, pentru a-l convinge să-şi dezvăluie formula. Tartaglia şi-a descris ulterior răspunsul în termeni neechivoci: „Spune-i Excelenţei Sale să mă ierte, dar atunci când îmi voi publica invenţia va fi în propria mea lucrare, nu în a altora, aşa că Excelenţa Sa trebuie să mă scuze”. După câteva schimburi de mesaje destul de lungi şi caustice, în care Tartaglia a respins toate propunerile lui Cardano, el a sfârşit prin a accepta invitaţia de a-l vizita la Milano pe acesta din urmă. Trucul care l-a înduplecat a fost promisiunea lui Cardano de a-l prezenta viceregelui şi comandantului suprem spaniol din Milano, Alfonso d’Avalos. Tartaglia scrisese o carte despre artilerie, iar un asemenea contact îi putea asigura un frumos venit.

La Milano, Cardano l-a supus pe Tartaglia unui adevărat tir de încântătoare dovezi de ospitalitate, continuându-şi strădania de a-i smulge secretul. Dar buzele lui Tartaglia au rămas pecetluite – cel puţin, pentru o vreme. El a respins până şi propunerea de a fi inclus în cartea lui Cardano un capitol care să-l proclame pe Tartaglia drept descoperitor al soluţiei.

Din păcate, de aici înainte, informaţiile noastre despre evenimentele care au urmat se bazează aproape exclusiv pe mărturia, departe de a fi obiectivă, a lui Tartaglia. Conform spuselor lui, el a sfârşit prin a fi de acord să divulge secretul, dar numai după ce Cardano i-a făcut următorul jurământ solemn: „Îţi jur pe Sfânta Evanghelie şi pe onoarea mea de gentilom că nu voi publica descoperirile domniei tale, dacă mi le vei spune, şi că – pun chezăşie credinţa mea de creştin adevărat – le voi încifra când mi le voi nota, în aşa fel încât după moartea mea nimeni să nu fie în stare să le priceapă”. Această importantă discuţie a avut loc pe 25 martie 1539. Ludovico Ferrari, pe atunci tânăr secretar în casa lui Cardano, ne

spune o poveste oarecum diferită. Conform acestuia, Cardano n-a făcut niciun jurământ de păstrare a secretului. Ferrari susţinea că ar fi fost de faţă la discuţie şi că Tartaglia dezvăluise secretul doar din recunoştinţă pentru ospitalitatea lui Cardano. Dar, aşa cum vom vedea îndată, obiectivitatea lui Ferrari este tot atât de chestionabilă ca şi cea a lui Tartaglia. Cert e numai faptul că *Practica arithmeticae generalis a* apărut în mai 1539 fără soluţia lui Tartaglia.

Ludovico Ferrari (1522 – 1565) este următorul personaj central29 al acestei drame tragicomice. El ajunsese în casa lui Cardano la vârsta de 14 ani, venind din Bologna. Cardano a descoperit repede talentele excepţionale ale tânărului, aşa că şi-a asumat întreaga responsabilitate a educaţiei sale. Ferrari era însă tot atât de irascibil, pe cât era de ager. Într-o încăierare, la vârsta de 17 de ani, şi-a pierdut degetele de la mâna dreaptă. Îndată ce a aflat soluţia lui Tartaglia, Cardano a reuşit s-o demonstreze, apoi a început să se preocupe de ecuaţii cubice mai generale. Amintiţi-vă că Tartaglia izbutise să rezolve doar forme particulare ale cubicei, cum ar fi x3 *+ ax = b* sau x3 *= ax + b.* Matematicienii secolului al XVI-lea nu realizaseră încă faptul că acestea sunt doar cazuri particulare ale ecuaţiei generale ax3 *+ bx2 +ex + d* = 0, aşa că tratau separat fiecare dintre cele 13 tipuri de ecuaţii cubice. Simultan, beneficiind şi de încurajările lui Cardano, sclipitorul Ferrari a reuşit în 1540, să găsească o frumoasă soluţie a *ecuaţiilor cuartice,* precum *x4* + bx2 + 36 = 60 x. Maestrul şi elevul erau acum pe picior de egalitate. Un zvon că dal Ferro îi lăsase ginerelui său formula sa originală ajunsese până la Cardano. În 1543, Cardano şi Ferrari au făcut un drum până la Bologna, special pentru a se întâlni cu Annibale della Nave, căruia îi fusese încredinţată lucrarea originală a lui Scipione dal Ferro. Acolo, ei au avut şansa să obţină direct de la sursă confirmarea faptului că dal Ferro ajunsese într-adevăr, cu 20 de ani înainte, la aceeaşi soluţie ca şi Tartaglia. Chiar dacă i-ar fi jurat ceva lui Tartaglia, Cardano se putea socoti

acum eliberat de orice obligaţii. La urma urmei, prin acel formal jurământ se angajase să nu dezvăluie formula lui Tartaglia, nu pe cea a lui dal Ferro. În 1545, Cardano a publicat lucrarea pe care mulţi matematicieni o privesc ca reprezentând începutul algebrei moderne – *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus (Marea artă sau regulile algebrei, Cartea întâi),* cunoscută sub numele de *Ars magna (Marea artă.* Figura 41 arată frontispiciul cărţii). În această carte, Cardano investighează în detaliu ecuaţiile cubică şi cuartică, împreună cu soluţiile lor. El demonstrează pentru prima dată că soluţiile pot fi negative, iraţionale, iar în unele cazuri pot implica chiar şi rădăcini pătrate din numere negative – cantităţi pe care el le numeşte „sofistice" şi care, în secolul al XVII-lea, aveau să primească denumirea de „numere imaginare". Tipograful Johannes Petreius din Nürnberg a publicat prima ediţie din *Ars magna*, care a impresionat Europa matematică şi a fost imediat aclamată. Un singur matematician, inutil să o spunem, a dat dovadă de mai puţin respect. Furia lui Tartaglia a fost inimaginabilă. În mai puţin de un an, el a publicat cartea *Quesiti et invenţioni diverse (Diverse probleme şi invenţii),* în care îl acuza direct pe Cardano de sperjur. Prezentând ceea ce pretindea a fi o relatare cuvânt cu cuvânt a tuturor discuţiilor dintre ei (chiar şi cele care avuseseră loc cu şapte ani înainte), Tartaglia folosea împotriva lui Cardano limbajul cel mai ofensator. Justificarea sa era următoarea: „Efectiv nu ştiu vreo infamie mai mare decât să încalci un jurământ". Dar oare chiar să fi fost Cardano un plagiator matematic? Al doilea paragraf din capitolul introductiv al *Ars magna* spunea:

În zilele noastre, Scipione dal Ferro din Bologna a rezolvat cazul egalităţii dintre un cub şi prima putere, pe de o parte, şi o constantă, pe de alta – o realizare foarte elegantă, absolut admirabilă. Cum arta aceasta depăşeşte orice iscusinţă umană, orice talent imaginabil, fiind un dar cu adevărat ceresc şi o dovadă foarte clară a capacităţii minţilor omeneşti, oricine i se dedică va crede că nu e

nimic pe care să nu-l poată pricepe.

În emulaţie cu el, prietenul meu Niccolò Tartaglia din Brescia, vrând să nu fie mai prejos, rezolvă acelaşi caz atunci când intră în dispută cu elevul lui Scipione, Antonio Maria Fiore, şi, înduplecat de numeroasele mele rugăminţi, îmi arătă soluţia lui. Căci eu fusesem înşelat de cuvintele lui Luca Pacioli, care tăgăduia că s-ar mai putea găsi vreo altă regulă, mai generală, decât a sa. În ciuda multelor lucruri pe care le descoperisem deja, după cum este bine cunoscut, îmi pierdusem nădejdea şi nu mai încercasem să-mi continui căutările. Atunci însă, primind soluţia lui Tartaglia şi căutându-i demonstraţia, am ajuns să pricep că mai aveam ce găsi. Urmărind această idee cu încredere sporită, am făcut toate aceste noi descoperiri, parte prin puterile mele, parte datorită lui Ludovico Ferrari, fostul meu elev.

În capitolul XI („Despre cubul şi prima putere egale cu un număr”), Cardano repetă pe scurt aceleaşi menţiuni de prioritate intelectuală:

Scipio Ferro din Bologna şi-a descoperit regula acum mai bine de treizeci de ani şi i-a transmis-o lui Antonio Maria Fiore din Veneţia, a cărui dispută cu Niccolò Tartaglia din Brescia i-a dat lui Niccolò prilejul s-o descopere la rândul lui. El (Tartaglia) mi-a dat-o mie ca răspuns la rugăminţile mele, deşi păstrând pentru sine demonstraţia. Înarmat cu acest ajutor, i-am căutat demonstraţia sub diverse forme. Lucrul acesta a fost foarte dificil. Versiunea mea a acestei demonstraţii urmează.

Tartaglia a fost departe de a se simţi îmblânzit de recunoaşterea lui Cardano. De fapt, campania de jigniri deja pornită s-a prefăcut într-un urât spectacol de insulte, jucat în faţa întregului public italian. În vreme ce Cardano se ţinea deoparte, aprigul său colaborator, Ludovico Ferrari, şi-a asumat cu plăcere rolul de gladiator intelectual, pentru a-şi apăra, după expresia sa, „creatorul”. Ca răspuns la cartea lui Tartaglia, Ferrari a conceput un *cartello* – o scrisoare de provocare – pe care l-a distribuit la cincizeci şi trei de savanţi şi demnitari din

întreaga Italie. Stilul adoptat de el a fost cât se poate de violent: „Citindu-ţi aiurelile, am impresia că citesc glumele lui Piovano Arlotto [un preot care trăise în secolul al XV-lea, cunoscut pentru glumele sale obscene]”. Continua apoi plin de dispreţ, acuzându-l pe Tartaglia însuşi că ar fi un plagiator: „Printre cele peste o mie de erori din cartea dumitale, remarc mai întâi că în secţiunea opt dai un rezultat al lui Giordano [referindu-se la matematicianul german din secolul al XIII-lea Jordanus Nemorarius, cunoscut şi ca Jordanus de Nemore] ca fiind al dumitale, fără a-l menţiona, iar asta se cheamă furt”. Primul *cartello* a fost trimis pe 10 februarie 1547. Tartaglia l-a primit pe 13 şi a avut nevoie de numai şase zile pentru a pregăti contraatacul. El s-a plâns mai întâi că Gerolamo Cardano nu se sinchisise să-i dea o replică:

Îţi atrag din nou atenţia că dacă numitul Domn Gerolamo Cardano nu are de gând să-mi scrie, recunoscând cu înţelepciune că a greşit, atunci n-are niciun motiv să se plângă de mine… Ar trebui, cel puţin, să te asiguri ca şi el să semneze cartelul, cu mâna lui, ca asociat al dumitale în această dispută.

Ca răspuns la invitaţia făcută de Ferrari la o dispută publică pe teme matematice, Tartaglia a declarat că s-ar disputa cu plăcere cu Cardano însuşi. Evident, Tartaglia nu vedea niciun motiv să provoace la discuţii un tinerel fără merite deosebite, deoarece, chiar ieşind victorios dintr-o asemenea dispută, nu prea avea ce câştiga; prefera să se lupte cu Cardano, a cărui reputaţie pe continent se afla într-o spectaculoasă creştere. Cardano ajunsese însă într-o etapă a vieţii în care dorea să promoveze un temperament mai echilibrat (el îi sfătuia pe savanţi să adopte un stil de viaţă bazat pe „lectura unor povesti de dragoste”). Ca atare, păstra tăcerea.

Între 10 februarie 1547 şi 24 iulie 1548, Tartaglia şi Ferrari au schimbat nu mai puţin de 12 *cartelli* (şase provocări şi şase replici), toate comunicate întregii înalte societăţi intelectuale. În ciuda stilului în general denigrator, aceste scrisori de provocare servesc şi ca o

interesantă documentaţie asupra cunoştinţelor a doi matematicieni de frunte ai Renaşterii. Necontenitele tentative ale lui Tartaglia de a-l atrage pe Cardano în dispută au eşuat lamentabil. În 1548, lui Tartaglia i s-a oferit postul de profesor de geometrie în oraşul său natal, Brescia. Datorită virulenţei corespondenţei sale cu Ferrari, foarte probabil ca numirea să fi fost condiţionată de înfrângerea lui Ferrari într-o dispută publică. Ca urmare, Tartaglia s-a văzut silit – de voie, de nevoie – să participe la o dezbatere. S-a convenit ca subiectul acesteia să fie reprezentat de 62 de probleme propuse de cei doi adversari (31 de către fiecare) – cele prezentate în cele 12 *cartelli.* Aproape toate erau de matematică, dar, conform cu spiritul Renaşterii, existau şi chestiuni din alte domenii, precum arhitectura, astronomia, geografia şi optica.

Dezbaterea a avut loc pe 10 august 1548, la Milano, într-o biserică situată în grădina Frati Zoccolanti. Toată protipendada milaneză era de faţă, inclusiv guvernatorul, Don Ferrante di Gonzaga, care urma să fie arbitrul cu drept de veto. Ferrari şi-a făcut apariţia cu o vastă ceată de susţinători, în vreme ce Tartaglia părea să fi fost însoţit doar de fratele său. Cardano făcuse în aşa fel încât să lipsească din oraş în timpul dezbaterii. Din păcate, nu există nicio consemnare oficială privitoare la desfăşurarea dezbaterii sau la verdictul final. În două cărţi ulterioare, Tartaglia prezintă relatări destul de confuze asupra confruntării. În particular, blamează asistenţa pentru a fi făcut intervenţii gălăgioase şi a-l fi împiedicat să-şi prezinte complet argumentele. Faptele seci prezintă însă un tablou destul de diferit. Tartaglia renunţase la dispută înainte de încheierea ei, imediat după sfârşitul primei zile. Mai ştim că lui i s-a refuzat plata după un an de predare la Brescia şi că a fost nevoit să se întoarcă la modesta meserie de dascăl la Veneţia. Toate semnele indică aşadar că Tartaglia ar fi suferit o cruntă şi umilitoare înfrângere la Milano. Cardano menţionează şi el în scrierile sale, pe scurt, că Ferrari s-ar fi dovedit un adversar mult superior lui Tartaglia.

Cât despre triumfătorul Ludovico Ferrari, cariera lui a luat un avânt extraordinar. În urma victoriei repurtate, ofertele de angajare au început să curgă. El a refuzat chiar şi oferta de a-l instrui pe fiul împăratului, pentru funcţia mai rentabilă de agent fiscal al guvernatorului oraşului Milano. Viaţa sa avea să se termine însă pe neaşteptate, furnizând actul final al acestei drame.

La revenirea sa la Bologna, cândva după 1556, Ferrari era însoţit de sora sa Maddalena, o văduvă sărmană. Deşi nu există vreo dovadă directă că ea l-ar fi otrăvit în 1565, totuşi comportamentul şi circumstanţele vieţii ei ulterioare ridică suspiciuni serioase. Maddalena s-a căsătorit la două săptămâni după moartea lui Ferrari şi i-a transferat soţului său toţi banii şi toate proprietăţile moştenite de la fratele ei. Când Cardano a venit la Bologna ca să-şi recupereze o parte dintre cărţi şi însemnări, nu a mai găsit nimic. Soţul Maddalenei pusese stăpânire pe tot, aparent cu intenţia de a publica ceva material în numele fiului său dintr-o căsătorie anterioară.

Istoria rezolvării30 ecuaţiilor cubice şi cuartice ridică probleme interesante, care depăşesc domeniul matematicii. Această poveste ar fi incompletă dacă n-am aborda subiectul proprietăţii intelectuale şi ai drepturilor de proprietate asupra informaţiei ştiinţifice. În timpul acerbei corespondenţe Tartaglia-Ferrari, Ferrari susţinuse că Gerolamo Cardano îi făcuse, de fapt, un serviciu lui Tartaglia, salvându-i formula de uitare şi plantând-o într-o „grădină fertilă” – *Ars magna.* Dar aşa stăteau oare lucrurile? Sau Tartaglia avea dreptate să riposteze că, fără formula aceasta, grădina lui Cardano ar fi rămas un obscur câmp de buruieni? Din perspectiva lui Tartaglia, Cardano era, indubitabil, diavolul. Nu numai că-şi încălcase jurământul, dar, făcând aceasta, îi răpise lui Tartaglia recunoaşterea şi faima la care acesta simţea că avea dreptul. Niciun rând dintre cele scrise de Cardano în cartea sa pentru a-i recunoaşte prioritatea nu i-ar fi putut vindeca această rană. Conta numai faptul că, după recunoaştere, toate referinţele se făceau la „formula lui

Cardano” şi la cartea lui. Mai grav, Cardano adăugase multe soluţii şi demonstraţii proprii la toate formele ecuaţiilor cubice şi cuartice, calitatea de realizare epocală a formulei lui Tartaglia pierzându-se în această învălmăşeală.

Dar ce se poate spune din perspectiva lui Cardano? Jurământ solemn sau nu, el considera în mod sigur că avea dreptul să-şi publice fecunda lucrare în materie. Punctul său de vedere este de înţeles mai ales dacă realizăm (aşa cum o făcea el) că nu Tartaglia, ci Scipione dal Ferro era la originea descoperirii formulei. Ce drept avea Tartaglia să împiedice publicarea unei formule pe care dal Ferro însuşi o lăsase pentru posteritate? Nici afirmaţia lui Tartaglia, că şi el era pe punctul să publice o carte asupra noii algebre, nu rezistă prea mult. Realitatea a fost că, în ciuda avansului substanţial pe care îl avea faţă de Cardano, Tartaglia s-a lăsat distras de alte proiecte, iar cartea asupra noii algebre nu a apărut niciodată.

Două exemple actuale, de practici ştiinţifice uzuale privind publicarea invenţiilor, ne pot ajuta să arătăm că problema drepturilor de autor nu e deloc simplă. Astronomii propun anual un plan de cercetare pentru Telescopul spaţial Hubble. După un foarte detaliat proces de evaluare din partea unor echipe de experţi, doar circa o propunere din şapte este selectată pentru observaţiile care urmează să fie efectuate. Datele culese sunt puse la dispoziţia celor care le-au propus la câteva zile după ce observaţia are loc. După aceasta, urmează o perioadă de proprietate de un an, în timpul căreia numai propunătorul are acces la date. Propunătorul poate profita de această perioadă pentru a analiza datele şi a publica rezultatele. După un an, datele devin publice, putând fi utilizate de toţi astronomii din lume. Stabilirea acestei practici a avut drept scop principal recunoaşterea faptului că descoperirile ştiinţifice (în special cele făcute cu fonduri de la buget) aparţin comunităţii globale şi nu trebuie tratate ca proprietate privată. În al doilea rând, procedurile au fost astfel gândite pentru a descuraja amatorii de amânări

să oprească la nesfârşit difuzarea informaţiilor importante pe care le deţin.

În acelaşi timp, companiile private care se ocupă, să zicem, cu modelarea matematică a comportării pieţii de mărfuri ţin cu dinţii de secretul descoperirilor lor, însă poate că nu mai mult decât anumiţi maeştri bucătari, de reţetele lor secrete.

Dintr-un punct de vedere pur ştiinţific, cel mai normal ar fi ca formula de rezolvare a ecuaţiei cubice să fie numită „formula lui dal Ferro", dat fiind că el a fost, neîndoielnic, primul care a descoperit-o. Acesta nu este însă nici primul, nici ultimul caz în care inovaţiile ştiinţifice poartă un alt nume decât cel al adevăratului lor autor. Atitudinea lui Tartaglia faţă de proprietatea intelectuală apare oarecum ipocrită din perspectiva propriilor lui practici. De pildă, el a prezentat ca fiind ale sale traducerile unor lucrări ale lui Arhimede, când, de fapt, nu făcuse decât să publice nişte traduceri latineşti din secolul al XIII-lea, ale eruditului flamand Wilhelm din Moerbeke. Tot astfel, el a publicat o soluţie a problemei mişcării unui corp greu pe un plan înclinat, fără a-l menţiona pe autorul soluţiei, matematicianul german Jordanus de Nemore.

Întreaga suită de evenimente dal Ferro-Tartaglia-Cardano-Ferrari rămâne una dintre cele mai controversate afaceri din istoria matematicii. Nu-i de mirare că mulţi istorici ai ştiinţei s-au delectat să muşte din ea. Din punctul de vedere al cărţii de faţă, important este că, după căderea cortinei asupra acestei drame, matematicienii ştiau să rezolve ecuaţiile cubice şi cuartice, chiar dacă o teorie generală a ecuaţiilor era încă absentă.

Cardano nu şi-a tăgăduit niciodată norocul. În *de Vita Propria,* el scrie:

Deşi fericirea evocă o stare cu totul contrară naturii mele, pot spune sincer că am fost privilegiat uneori să am parte întrucâtva de ea. Dacă în viaţă există cât de cât ceva bun cu care să putem împodobi scena acestei comedii, eu n-am fost lipsit de asemenea daruri.

Dat fiind rolul pe care avea să-l joace, câteva secole

mai târziu, rezolvarea ecuaţiilor în formularea teoriei grupurilor ca limbaj „oficial” al simetriei din natură şi arte, următorul fapt istoric iese în evidenţă, ca o curiozitate amuzantă. Cardano a publicat horoscopurile31 a o sută de oameni proeminenţi ai veacului său. Doar unul dintre ei, Albrecht Dürer, era artist.

Pentru a încheia această istorisire, trebuie să adaug o părere personală. În vara anului 2003, am decis că trebuia să găsesc locul de naştere al adevăratului erou al ecuaţiei cubice – Scipione dal Ferro. După ceva efort, l-am descoperit. Se află astăzi la intersecţia dintre via Guerrazzi şi via S. Petronio Vecchio din Bologna. O placă uşor de trecut cu vederea de pe zidul lateral marchează casa drept locul de naştere al lui dal Ferro (figura 42). Am apăsat la întâmplare pe soneriile mai multor apartamente şi o doamnă vârstnică a apărut la fereastra unui apartament de la etajul trei. I-am explicat, în italiana mea stângace, că cercetam viaţa lui Scipione dal Ferro. Mi-a spus să aştept până coboară soţul ei. Amabilul domn mi-a explicat, într-un amestec fragmentar de italiană şi engleză, că în clădire nu mai exista nimic care să indice faptul că acolo trăise omul responsabil pentru una dintre realizările majore ale algebrei. Ne-am uitat amândoi în tăcere la placă, preţ de câteva minute, apoi ne-am despărţit.

După sclipitoarea realizare dal Ferro-Cardano-Ferrari, era firesc să se creadă că *ecuaţia cvintică,* de forma $ax5 + bx4 + ex3 + dx2 + ex +$

$+ f =$ 0, putea fi, şi ea, rezolvată printr-o formulă. Cu încrederea dată de *Ars magna,* toţi se aşteptau ca soluţia să apară în orice clipă, aşa că unele dintre minţile cele mai ascuţite s-au apucat să vâneze această comoară.

Vă proclamăm cel mai mare eşec

Scriitorul satiric Jonathan Swift (1667 – 1745), celebru pentru *Călătoriile lui Gulliver,* a scris în 1727 un poem amuzant, intitulat *Mobilierul minţii unei femei.* Iată câteva versuri:

În conversaţia bine ticluită.

Ei i se pare nostim să fie necioplită;

Şi îmbrăcând ocara-n ironie.
Eşecul cel mai mare ţi-l proclamă ţie.

În cei 250 de ani de după moartea lui Cardano, istoria căutării unei formule de rezolvare a cvinticei este una a unui mare eşec. Ea a început cu un alt bolognez, Rafael Bombelli32 (1526 – 1572). Printr-o coincidenţă istorică, Bombelli s-a născut exact în anul morţii lui dal Ferro. După ce a studiat cu mare admiraţie *Ars magna,* el a simţit că expunerea lui Cardano nu fusese suficient de limpede; citându-l, „În tot ceea ce a spus, a fost neclar". Ca urmare, şi-a petrecut două decenii scriind o carte importantă, numită *L'Algebra.* Spre deosebire de alţi matematicieni italieni, Bombelli nu era profesor universitar, ci hidrotehnician. Cea mai originală contribuţie a sa a fost să realizeze că nu putem evita rădăcinile pătrate ale numerelor negative. Dar asta necesita un salt mintal. La urma urmelor, ce este rădăcina pătrată din – 1? Evident, niciun număr obişnuit (real) înmulţit cu el însuşi nu dă – 1, dat fiind că până şi înmulţirea unui număr negativ cu el însuşi dă un rezultat pozitiv. Cu toate acestea, soluţia ecuaţiei cubice (vezi Anexa 5) producea uneori, drept pas intermediar, o rădăcină pătrată dintr-un număr negativ, chiar atunci când rezultatul final era un număr real. Cardano, care fusese intrigat de aceste numere „sofistice", a conchis că ele erau „atât de subtile, încât erau inutile", şi când trebuia să le folosească în calcul, spunea că o face „ignorând tortura mintală". Bombelli, pe de altă parte, a avut inspiraţia să priceapă că aceste noi numere, pe care le-a numit „plus din minus", erau un vehicul necesar, care putea traversa abisul dintre ecuaţia cubică (exprimată prin numere reale) şi soluţiile finale (care erau tot numere reale). Cu alte cuvinte, deşi atât începutul cât şi sfârşitul implică numere reale, soluţia trebuia să traverseze noul univers al numerelor „imaginare". Rădăcina pătrată a lui – 1 a fost notată cu *i* în anul 1777, de către marele matematician elveţian Leonhard Euler. Numerele din noile tărâmuri dezvăluite de lucrarea lui Bombelli sunt numite astăzi

numere complexe – ele sunt sume de numere reale (toate numerele obişnuite) şi numere imaginare (care cuprind rădăcini pătrate din numere negative).

Mai era încă o importantă lecţie istorică de învăţat de aici. De-a lungul timpului, studiul ecuaţiilor le oferise de mai multe ori matematicienilor o primă privire asupra unor noi tipuri de numere. Fuseseră numere negative, precum – 1 şi – 2; numere iraţionale, precum $\sqrt{2}$, care nu puteau fi exprimate ca fracţii; iar prin lucrarea lui Bombelli, chiar şi numere imaginare, precum $\sqrt{-1}$. Cine putea spune ce revelaţii putea aduce rezolvarea cvinticii?

În secolele următoare, dezlegarea enigmei cvinticii a devenit una dintre cele mai fascinante provocări din matematică. Din păcate, soluţiile descoperite de dal Ferro şi Ferrari (pentru ecuaţia cubică, respectiv cea cuartică) nu erau de mare folos. Ele reprezentau nişte trucuri strălucite, dar mai degrabă *ad-hoc,* decât studii metodice care să poată fi extinse la ecuaţii de un grad mai mare. De o necesitate acută era găsirea unei teorii mai cuprinzătoare a ecuaţiilor în general, nu experimentarea cazurilor particulare. Pentru a folosi o metaforă medicală, matematica trebuia să treacă de la tratarea simptomelor la înţelegerea cauzelor şi a efectelor colaterale asociate.

Avocatul francez François Viète33 (1540 – 1603) şi astronomul englez Thomas Harriot (1560 – 1621) au făcut câţiva paşi în direcţia cea bună. Eu au introdus ameliorări atât în notaţia folosită pentru a descrie ecuaţiile algebrice (care era extrem de greoaie în lucrarea lui Cardano), cât şi în metodele de rezolvare propriu-zise. Viète a fost şi cel căruia i se datorează cuvântul *coeficienţi,* folosit pentru a desemna numerele care descriu o ecuaţie (de ex., *a, b, e* din ecuaţia $ax^2 + bx + e = 0$). Deşi nu era de meserie matematician, Viète a ajuns la un moment dat să salveze onoarea întregii societăţi matematice franceze. În 1593, la sfârşitul prefeţei cărţii sale *Ideae mathematicae*, matematicianul flamand Adriaan van Roomen (1561 – 1615) a lansat o provocare confraţilor săi, propunându-le o problemă ce implica rezolvarea unei intimidante ecuaţii de

gradul 45 (vezi Anexa 6). Ambasadorul Ţărilor de Jos la Paris s-a delectat să-i remarce ironic regelui Henric al IV-lea că nu se găsea niciun matematican francez care să poată rezolva ecuaţia. Încurcat, regele a apelat la Viete34 şi a fost plăcut surprins să constate că acesta s-a dovedit în stare (conform legendei) să găsească soluţiile pozitive în câteva minute, descoperind o relaţie trigonometrică subiacentă problemei. În fapt, Viete a făcut mult mai mult – a arătat că ecuaţia avea 23 de soluţii pozitive şi 22 negative.

Prima încercare serioasă, dar tot eşuată, de a rezolva cvintica a fost făcută de scoţianul James Gregory35 (1638 – 1675). Gregory este cunoscut în special pentru telescopul cu reflexie (telescopul gregorian) pe care l-a inventat. În timpul anului de dinaintea morţii sale (la vârsta de numai 36 de ani), el începuse să nu mai creadă că era posibilă găsirea vreunei formule pentru determinarea soluţiilor ecuaţiei cvintice. Cu toate acestea, a descoperit nişte relaţii între soluţiile diverselor ecuaţii şi coeficienţii lor. Următorul pas a fost făcut de contele german Ehrenfried Walther von Tschimhaus36 (1651 – 1708). Om cu multe performanţe, mergând de la sticlărie la algebră, acesta a elaborat o metodă interesantă, care, un timp, a dat speranţa că s-ar vedea lumina de la capătul tunelului. Ideea fundamentală era simplă. Dacă ecuaţia cvintică putea fi redusă cumva la ecuaţii de un grad mai mic (cum ar fi cuartica şi cubica), atunci s-ar fi putut folosi soluţiile cunoscute ale acestor ecuaţii. În particular, Tschimhaus a reuşit prin anumite substituţii ingenioase să scape de termenii x4 şi x3 din ecuaţie. Din păcate, mai rămânea un obstacol major în metoda lui Tschimhaus, care a fost curând observat de matematicianul şi filosoful Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), iar Tschimhaus, după un efort susţinut depus pentru depăşirea lui, şi-a recunoscut înfrângerea.

Secolul al XVIII-lea a adus un interes reînnoit şi o viguroasă serie de atacuri ale problemei. Francezul Étienne Bezout37 (1730 – 1783), care publicase mai multe

lucrări asupra teoriei ecuaţiilor algebrice, a adoptat metode oarecum similare cu ale lui Tschimhaus, dar din nou fără succes. În acest punct, a intrat în cursă cel mai prolific matematician al tuturor timpurilor.

Leonhard Euler38 (figura 43) a fost atât de productiv, încât ar fi necesar un întreg volum numai pentru a reproduce lista publicaţiilor sale. Corpusul lucrărilor lui de matematică şi fizică matematică constituie circa o treime din toate lucrările publicate în aceste domenii în ultimele trei sferturi ale secolului al XVIII-lea. Euler a emis ipoteza că soluţia cvinticei ar putea fi exprimată în funcţie de patru mărimi şi a concluzionat pe un ton optimist: „Se poate presupune că dacă eliminarea ar fi făcută cu grijă, ea ar putea conduce la o ecuaţie de gradul 4”. Cu alte cuvinte, el credea în mod optimist că problema putea fi redusă la una care fusese deja rezolvată. Această filosofie generală este o caracteristică a progreselor în matematică. Într-o veche anecdotă, un matematician şi un fizician sunt întrebaţi ce-ar face dacă ar trebui să-şi calce pantalonii, dar, deşi ar dispune de un fier de călcat, priza electrică s-ar afla în camera alăturată. Amândoi răspund că ar lua fierul de călcat în cea de-a doua cameră şi l-ar băga în priză acolo. Apoi sunt întrebaţi ce-ar face dacă s-ar afla de la bun început în camera unde se găseşte priza. Fizicianul răspunde că ar băga fierul direct în priză. Matematicianul, pe de altă parte, spune că ar duce fierul de călcat în camera fără priză, din moment ce problema a fost deja rezolvată.

În ciuda optimismului său, Euler nu a reuşit să rezolve cvintica generală. Ajunse totuşi să arate că anumite cvintice particulare, cum ar fi x5 – 5 px3 + 5 z – *q* = 0 (unde *p* şi *q* sunt numere date), pot fi rezolvate printr-o formulă. Aceasta lăsa uşa deschisă pentru potenţiale strădanii viitoare. Următorul la rând a fost suedezul Erland Samuel Bring39 (1736 – 1798). De meserie profesor de istorie la Universitatea din Lund, Bring avea drept distracţie favorită matematica. Şi ce altă enigmă îl putea atrage mai mult decât cvintica? El a făcut ceea ce părea a

fi un pas uriaş spre găsirea soluţiei. A găsit o transformare care putea reduce ecuaţia cvintică generală (ax5 + *bx*4 + *ex3* + *dx2* + *ex* + *f* = 0) la forma mult mai simplă x5 + *px* + *q* = 0. Din păcate, această formă mult mai scurtă şi aparent mult mai abordabilă a continuat să prezinte un obstacol de netrecut şi, în plus, remarcabila transformare a lui Bring a trecut complet neobservată, urmând a fi redescoperită în mod independent în secolul al XIX-lea de către matematicianul englez George Birch Jerrard.

Alte trei încercări, făcute de matematicieni lucrând simultan în trei ţări diferite, au eşuat în a produce vreo soluţie. Totuşi, lucrările lor, de mare substanţă, au introdus în joc o nouă şi pasionantă idee. În particular, ei au arătat că proprietăţile permutărilor presupuselor soluţii puteau avea ceva de spus în privinţa posibilităţii de soluţionare a ecuaţiei printr-o formulă. Cum acesta a fost, din punct de vedere istoric, primul pas înspre realizarea unei conexiuni între soluţiile ecuaţiilor şi conceptul de simetrie, voi da o scurtă explicaţie a principiului de bază. Să luăm, de exemplu, ecuaţia pătraţică ax2 + *bx* + *e* = 0 (unde *a, b, e* sunt numere cunoscute). Se poate uşor arăta că dacă cele două soluţii ale ecuaţiei (date de formula de la pagina 73) sunt notate x1 şi x2, atunci atât suma x1 + x2 a soluţiilor, cât şi produsul lor *x*1 *x*2 pot fi exprimate în funcţie de coeficienţii *a*, *b*, *e* (vezi Anexa 7). Mai exact, x1 + x2 = – *b/a,* iar x1 x2 = e/a. Cu alte cuvinte, în ecuaţia x2 – 9 x + 20 = 0, suma celor două soluţii este egală cu 9, iar produsul lor este egal cu 20. Formula de rezolvare din pagina 73 poate fi ea însăşi exprimată (Anexa 7) ca o combinaţie de x1 + x2 şi x1 x2:

Punctul important care trebuie notat aici este că această expresie este simetrică la schimbarea între ele a celor două soluţii *x1* şi *x2* – formula rămâne neschimbată la permutarea acestora. Întrebarea pusă de francezul Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796) şi de englezul Edward Waring40 (1736 – 1798) a fost dacă soluţia cvinticii – şi, în general, a unei ecuaţii de orice grad – nu putea fi exprimată printr-o expresie asemănătoare,

simetrică. În principiu, aceasta putea conduce la găsirea unei formule de rezolvare. Ideea a fost preluată de persoana pe care Napoleon Bonaparte o considera „înalta piramidă a ştiinţelor matematice” – Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813).

Lagrange (figura 44) s-a născut la Torino41, în Italia de astăzi, dar familia lui era parţial de origine franceză pe linie paternă, iar el se considera „mai mult” francez decât italian. Tatăl său, care iniţial fusese bogat, reuşise să risipească toată averea familiei în jocuri de bursă, lăsându-şi fiul fără nicio moştenire. Ulterior, Lagrange şi-a descris catastrofa economică drept cel mai bun lucru care i se întâmplase vreodată: „Dacă aş fi moştenit vreo avere, probabil nu mi-aş fi bătut capul cu matematica”.

În valoroasa sa lucrare (publicată la Berlin) *Traité de la résolution numérique des équations de tous les degrés,* Lagrange a trecut pentru prima oară în revistă contribuţiile lui Bézout, Tschimhaus şi Euler. El a arătat apoi că toate trucurile prin care se obţinuseră soluţiile ecuaţiilor liniară, pătraţică, cubică şi cuartică puteau fi înlocuite printr-un procedeu unitar. Aici a urmat însă o surpriză neplăcută. Pentru gradele doi, trei şi patru, ecuaţiile fuseseră rezolvate prin reducere la o ecuaţie de ordin imediat inferior (de ex., reducând cuartica la o cubică etc.) Când s-a încercat aplicarea aceluiaşi procedeu asupra cvinticei, s-a întâmplat ceva neobişnuit. Ecuaţia rezultantă, în loc să fie o cuartică, s-a dovedit a fi de grad şase! Metoda care funcţionase perfect pentru gradele doi, trei şi patru eşuase complet în cazul cvinticei. Dezamăgit, Lagrange a conchis: „Este deci improbabil ca această metodă să conducă la rezolvarea cvinticei – una din cele mai celebre şi importante probleme ale algebrei”.

Ca o cale de ieşire din impas, Lagrange a introdus o metodă mai generală de analizare a permutărilor. Amintiţi-vă că permutările sunt operaţii care produc diverse aranjamente ale obiectelor, cum ar fi transformarea lui *ABC* în *BAC* sau *CBA.* Lagrange a făcut importanta descoperire că proprietăţile ecuaţiilor şi rezolvabilitatea

lor depind de anumite simetrii ale soluţiilor, obţinute în urma permutărilor.

Dar chiar şi noile lui idei, aşa deschizătoare de drumuri cum erau ele, s-au dovedit insuficiente pentru rezolvarea cvinticei. Rămânând optimist că această analiză va duce la strict necesara descoperire ce trebuia făcută, el scria: „Sperăm să revenim altă dată la această chestiune şi suntem mulţumiţi de a fi pus bazele unei teorii care pare a fi nouă şi generală". Aşa cum istoria avea să noteze, Lagrange n-a mai revenit niciodată asupra cvinticei. Cu două zile înaintea morţii sale, şi-a rezumat astfel viaţa: „Cariera mea a ajuns la capăt; am dobândit ceva renume în matematică. N-am urât pe nimeni, nici n-am făcut rău nimănui; pentru mine, e bine să ajung la sfârşit".

În aceeaşi perioadă, mai exista o problemă algebrică discutată în cercurile matematice, iar ea a avut implicaţii asupra încercărilor de rezolvare a cvinticei. Întrebarea care se punea era următoarea: Au oare toate ecuaţiile (de orice ordin) cel puţin o soluţie? De exemplu, cum ştim dacă există vreo valoare a lui *x* care satisface relaţia *x4* + 3 x3 – *2 x2* + 19 x + 253 = 0? Mai precis, dacă avem o ecuaţie de grad *n* (unde *n* poate fi orice număr 1, 2, 3, 4...) şi le permitem soluţiilor să fie numere reale sau complexe (conţinând pe *i* = V-1, câte soluţii există? Cunoaştem deja răspunsul în cazul ecuaţiei pătraţice – există exact două soluţii. Ce se întâmplă însă pentru *n* = 5 sau *n* = 17? Deşi mulţi matematicieni, inclusiv Leibniz, Euler şi Lagrange, au încercat să dea un răspuns, concluzia definitivă a rămas în seama contabilului elveţian Jean-Robert Argand (1768 – 1822)

şi a bărbatului recunoscut drept „prinţul matematicienilor" – Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855; figura 45).

Geniul lui Gauss fusese recunoscut42 încă de la vârsta de şapte ani, când reuşise să adune instantaneu în minte numerele întregi de la 1 la 100, observând pur şi simplu că totalul se obţine din cincizeci de perechi de numere, fiecare pereche având suma 101.

În dizertaţia sa doctorală din 1799.

Gauss a făcut prima demonstraţie a ceea ce a devenit cunoscut ca *teorema fundamentală a algebrei* – afirmaţia că orice ecuaţie de gradul n-are exact *n* soluţii (care pot fi numere reale sau complexe). Acea primă demonstraţie conţinea anumite lacune logice, dar el a mai făcut de-a lungul vieţii încă trei, toate riguroase. Demonstraţia lui Argand43, publicată în 1814, a fost, de fapt, prima corectă.

Teorema fundamentală a algebrei spune, fără ambiguitate, că ecuaţia cvintică generală trebuie să aibă cinci soluţii. Puteau fi ele însă găsite printr-o formulă? În acelaşi an în care şi-a publicat prima demonstraţie a teoremei fundamentale, Gauss şi-a exprimat scepticismul44 în legătură cu rezolvarea printr-o formulă a ecuaţiei cvintice: „Eforturile numeroşilor geometri ne spun că au rămas puţine speranţe de a ajunge vreodată la rezolvarea algebrică a ecuaţiei generale, aşa că această rezolvare pare din ce în ce mai imposibilă şi contradictorie”. Dar apoi el a adăugat o notă interesantă: „Poate că nu va fi greu să se demonstreze, cu toată rigoarea, imposibilitatea pentru gradul cinci”. Gauss nu avea să mai publice niciodată vreun rând pe această temă.

Eşecurile repetate suferite pe parcursul a peste două secole de vânătorii cvinticei l-au determinat pe istoricul francez al matematicii Jean Étienne Montucla45 (1725 – 1799) să folosească nişte metafore militare pentru a descrie atacurile date asupra ei: „Scările sunt ridicate peste tot în jur, dar, închisă în ultima-i redută, problema se apără cu disperare. Cine va fi norocosul geniu care va conduce asaltul decisiv împotriva ei sau o va sili să capituleze?”

Printr-o altă coincidenţă istorică, seria finală şi concludentă de ofensive împotriva cvinticei era pe punctul să înceapă exact în anul morţii lui Montucla. La fel ca în cazul cubicei şi al cuarticei, ea a fost declanşată de un italian.

Paolo Ruffini46 (1765 – 1822; figura 46) s-a născut la Valentano, în Italia. Era fiul medicului Basilio Ruffini şi al

Mariei Francesca Ippoliti. Familia s-a mutat în Reggio, lângă Modena, pe vremea când Ruffini avea zece ani, Modena fiind locul unde a studiat el matematica, medicina, literatura şi filosofia, luându-şi diploma în 1788. Extraordinar de versatil, Ruffini a început să practice medicina şi, în acelaşi timp, să predea matematica. Ca urmare a Revoluţiei Franceze, vremurile deveniseră foarte nesigure. Armata franceză comandată de Napoleon Bonaparte cucerea un oraş italian după altul, ocupând Modena în 1796. Ruffini a fost iniţial numit ca reprezentant în Consiliul Inferior al Republicii Cisalpine instituite de Napoleon, dar şi-a pierdut postul de profesor după ce a refuzat să jure credinţă noii republici. În mod curios, realizările sale cele mai importante provin din exact această perioadă, de mari tulburări. El susţinea a fi demonstrat că ecuaţia cvintică generală nu poate fi rezolvată printr-o formulă implicând doar simplele operaţii de adunare, scădere, înmulţire, împărţire şi extragere de radicali.

Aici trebuie să ne oprim o clipă, pentru a aprecia implicaţiile afirmaţiei lui Ruffini. Formula de rezolvare a ecuaţiei pătraţice fusese esenţialmente cunoscută încă din vremurile babiloniene. Formula cubicei fusese descoperită de dal Ferro, Tartaglia şi

Cardano. Ferrari dăduse soluţiile cuarticei. Toate aceste formule presupuneau aplicarea celor patru operaţii aritmetice de bază şi extrageri de radicali. Au urmat apoi două secole şi jumătate de aşteptări înşelate, în timpul cărora câţiva dintre cei mai strălucitţi matematicieni au încercat zadarnic să găsească o asemenea formulă pentru cvintică. Acum Ruffini pretindea că putea demonstra că, oricât s-ar încerca, ecuaţia cvintică nu putea fi rezolvată printr-o formulă de acest tip. Aceasta reprezenta o adevărată revoluţie în modul de a gândi ecuaţiile. Matematicienii se obişnuiseră cu faptul că anumite ecuaţii sunt foarte greu de rezolvat, dar demonstraţia lui Ruffini părea a avea menirea să arate că, în cazul cvinticei, eforturile lor erau condamnate din start.

Ruffini şi-a publicat demonstraţia într-un tratat în două volume, intitulat *Teoria generale delle equazioni (Teoria generală a ecuaţiilor),* care a apărut în 1799. Ea era însă extrem de complicată, raţionamentul întortocheat făcând-o greu de urmărit pe parcursul celor 516 pagini ale tratatului. Deloc surprinzător, reacţia lumii matematice a fost, în cel mai mai bun caz, una de scepticism şi suspiciune. Cam prin anul 1801, Ruffini i-a trimis lui Lagrange un exemplar din *Teoria,* dar nu a primit niciun răspuns. Fără să se simtă descurajat, i-a trimis un al doilea exemplar, scriindu-i:

Nefiind sigur că mi-aţi primit cartea, vă trimit un alt exemplar. Dacă am greşit în demonstraţia mea, dacă am spus un lucru pe care-l credeam nou, dar nu este, în fine, dacă am scris o carte inutilă, vă rog să mi-o spuneţi sincer.

Lagrange nu i-a răspuns nici la această scrisoare. Ruffini a încercat o ultimă oară, în 1802, începând prin a lăuda opera lui Lagrange:

Nimeni nu are mai mult dreptul... să primească această carte, pe care-mi iau libertatea să v-o trimit... Scriind-o, am avut drept scop principal demonstrarea imposibilităţii rezolvării ecuaţiilor de grad mai mare decât patru.

Tot niciun răspuns.

Dezolat de primirea făcută cărţii sale, Ruffini a încercat să publice, în 1803 şi 1806, variante mai scurte şi oarecum mai puţin încâlcite ale acestei demonstraţii. De asemenea, a discutat-o cu confraţii săi matematicieni Gianfrancesco Malfatti (care publicase un tratat asupra cvinticei în 1771) şi Pietro Paoli. Aceste ultime conversaţii au dus la o versiune finală a demonstraţiei, publicată în 1813 în articolul „Consideraţii asupra rezolvării ecuaţiilor algebrice generale". Din păcate, nici această demonstraţie, care se voia mai transparentă, nu a făcut vâlvă în comunitatea matematică.

Într-un raport către rege, intitulat „Raport istoric asupra progresului ştiinţelor matematice după 1709", matematicianul şi astronomul francez Jean-Baptiste Joseph

Delambre47 (1749 – 1822) a menţionat pe scurt contribuţiile lui Ruffini, folosind însă un limbaj mai degrabă dubitativ: „Ruffini îşi propune să demonstreze că rezolvarea este imposibilă”. Exasperat, Ruffini protestează pe loc: „Nu mi-am propus să demonstrez, ci am demonstrat cu adevărat”. Nici aceasta nu a dus la o acceptare generală a demonstraţiei lui Ruffini din partea contemporanilor şi urmaşilor săi. Mai rău încă, Delambre i-a explicat lui Ruffini că era inutil să aştepte un răspuns definitiv, deoarece „indiferent de decizia pe care referenţii dumneavoastră [matematicienii Lagrange, Lacroix şi Legendre] ar fi luat-o [cu privire la validitatea demonstraţiei], ei trebuie să depună un efort considerabil fie pentru a-şi motiva acordul, fie pentru a vă respinge demonstraţia”. Din anumite comentarii pe care Lagrange i le-a făcut la bătrâneţe savantului şi farmacistului Gaultier de Claubry, putem deduce că, deşi fusese în general impresionat de lucrarea lui Ruffini, nici măcar el nu era intelectualiceşte înclinat să accepte un concept atât de revoluţionar, precum imposibilitatea de a rezolva cvintica printr-o formulă. În consecinţă, Lagrange n-a făcut niciodată vreo declaraţie publică despre demonstraţia lui Ruffini.

Disperat, Ruffini şi-a trimis demonstraţia la Societatea Regală din Londra. A primit un răspuns politicos, care spunea că, deşi câţiva membri care-i citiseră lucrarea o găseau satisfăcătoare, politica societăţii nu era de a publica aprobări ale unor demonstraţii. Singurul matematician distins care a acordat credit rezultatului lui Ruffini a fost Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857). Productivitatea lui Cauchy a fost atât de prodigioasă (el a publicat stupefiantul număr de 789 de lucrări), încât la un moment dat a trebuit să-şi fondeze propria sa revistă. Într-o scrisoare primită de Ruffini cam cu şase luni înainte de moartea sa, Cauchy, în general rezervat cu complimentele48, scria:

Memoriul dumneavoastră asupra rezolvării generale a ecuaţiilor este o operă care mi-a părut totdeauna demnă

de atenţia matematicienilor şi care, în opinia mea, demonstrează complet insolvabilitatea ecuaţiilor de grad mai mare decât patru... Mai adaug că lucrarea dumneavoastră asupra insolvabilităţii este tocmai titlul unei conferinţe pe care am ţinut-o în faţa mai multor membri ai Academiei.

Chiar şi cu aprecierea lui Cauchy, demonstraţia lui Ruffini n-a devenit niciodată nici larg cunoscută, nici acceptată. Majoritatea matematicienilor continuau să găsească argumentele lui atât de încurcate, încât le era cu neputinţă să le judece corectitudinea.

A demonstrat însă cu adevărat Ruffini insolvabilitatea cvinticei printr-o formulă conţinând doar operaţii simple? Cu înţelepciunea noastră de acum, putem spune că demonstraţia lui n-a fost completă. Continua să aibă o lacună semnificativă, acolo unde Ruffini făcuse o presupunere, fără a observa că ea trebuia demonstrată, şi se mulţumise să noteze că orice altă presupunere ar conduce la o situaţie mai complicată, aşa încât „o putem abandona cu totul”. Această imperfecţiune nu răpeşte însă nimic din originalitatea descoperirii sale. În fapt, niciunul dintre contemporanii lui Ruffini n-a localizat lacuna demonstraţiei. Lui Ruffini i se datorează o schimbare revoluţionară în abordarea ecuaţiilor. În loc să se mai încerce rezolvarea cvinticei, eforturile aveau să fie depuse în sens invers, pentru demonstrarea imposibilităţii ei de rezolvare.

Când ajungem astăzi să evaluăm opera lui Ruffini, realizăm că meritul lui nu este doar cel de a fi schimbat ideile asupra ecuaţiei cvintice. Mai mult, a împins cu un pas mai departe relaţiile dintre soluţiile cubicei şi cuarticei şi anumite permutări. Aceasta a marcat începutul tranziţiei de la algebra tradiţională, care se ocupă doar de numere, spre rădăcinile teoriei grupurilor, care implică operaţii între elemente de orice fel. Reamintim că elementele grupurilor pot fi de absolut orice tip, de la numere întregi la simetriile corpului omenesc. Naşterea algebrei abstracte se întrevedea la orizont.

Ruffini fusese totdeauna excesiv de conştiincios. A refuzat o dată o catedră la Padova fiindcă nu voia să părăsească familiile pe care le trata ca medic. Infinit de devotat pacienţilor săi, el a contractat o febră tifoidă severă în timpul epidemiei din 1817 – 1818. Şi s-a folosit de această experienţă traumatizantă pentru a scrie *Memoriu asupra tifosului contagios.* Deşi foarte slăbit, a continuat să-şi viziteze pacienţii şi nu a renunţat la cercetări matematice. În aprilie 1822, a făcut brusc pericardită cronică şi a murit în luna următoare. Ciudat, după moartea sa, realizările i-au fost aproape uitate şi, cu excepţia lui Cauchy, matematicienii care i-au urmat au trebuit să-i redescopere ideile.

Aceasta era situaţia în momentul apariţiei a doi tineri, poate cele mai tragice figuri din istoria matematicii. Norvegianul Niels Henrik Abel şi francezul Evariste Galois erau pe punctul să schimbe pentru totdeauna cursul algebrei. Poveştile vieţilor acestor oameni remarcabili sunt atât de sfâşietoare încât mă simt îndemnat să le prezint în detaliu, în următoarele două capitole.

4

Matematicianul chinuit de sărăcie

C

elebrul roman *Poveste de iubire* al lui Erich Segal începe astfel: „Ce să spui despre o fată de douăzeci şi cinci de ani care a murit? Că era frumoasă şi că strălucea, că îi plăceau Mozart şi Bach. Şi Beatles, şi eu”. Acest trist rezumat ar putea fi cu uşurinţă parafrazat pentru Evariste Galois (1811 – 1832) şi Niels Henrik Abel (1802 – 1829). Pentru Galois, el ar trebui să sune cam aşa: „Ce să spui despre un băiat de douăzeci şi unu de ani care a murit? Că era romantic şi genial, că-i plăcea matematica. Şi a fost doborât de neînţelegere şi autodistrugere”. Sau, pentru Abel: „Ce să spui despre un băiat de douăzeci şi şapte de ani care a murit? Că era timid şi genial, că-i plăceau matematica şi teatrul. Iar sărăcia l-a condamnat la moarte”. Matematicianul suedez Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927) descria realizările matematice ale lui Abel1

în cuvintele: „Cele mai bune lucrări ale lui Abel sunt adevărate poeme lirice, de o sublimă frumuseţe… ridicate mult deasupra platitudinii vieţii şi provenind mai direct din esenţa sufletului decât creaţiile oricărui poet obişnuit”. Marele matematician austriac Emil Artin (1898 – 1962) scria despre Galois2: „Încă din tinereţea mea matematică, m-am aflat sub vraja teoriei clasice a lui Galois. Vraja aceasta m-a silit să revin la ea iarăşi şi iarăşi, de nenumărate ori”. Într-adevăr, genialitatea celor doi ar putea fi comparată cu o supernovă – o stea explodând, care pentru un scurt răstimp face să pălească sclipirea tuturor miliardelor de stele din galaxia care o găzduieşte.

Abel – primii ani

Niels Henrik Abel s-a născut pe 5 august 1802. Era al doilea fiu al unui pastor luteran, Soren Georg Abel, şi al Annei Marie Simonsen, fiica unui comerciant maritim (figura 47 arată siluetele părinţilor lui Niels Henrik). La câţiva ani după naşterea lui Abel, mama sa a relatat că născuse prematur cu trei luni şi că dăduse semne de viaţă doar după ce fusese îmbăiat în vin roşu. Neverosimila combinaţie dintre un tată provenind dintr-o lungă serie de oameni în sutană şi o femeie de o remarcabilă frumuseţe, a cărei pasiune pentru desfătările lumeşti era cunoscută, nu promitea o căsătorie fericită. Înainte ca Niels să împlinească doi ani, tatăl lui a ocupat un post în satul Gjerstad, înlocuindu-l acolo ca preot pe propriul său tată. Norvegia, care pe atunci făcea parte din Danemarca, era constant în umbra războiului, întâi pe mare, cu flota engleză, apoi pe uscat, cu Suedia. Rezultatele blocadei căilor maritime ale Norvegiei de către flota engleză au fost devastatoare. Toate exporturile de lemn pentru construcţii s-au oprit la jumătatea anului 1808, iar comercializarea grânelor din Danemarca devenise atât de primejdioasă, încât se redusese şi ea aproape la zero. Foametea şi moartea s-au extins asupra Norvegiei în 1809. Pastorul Abel a reuşit cu greu să combată foametea în propria-i parohie, convingându-i pe oamenii din Gjerstad să mănânce carnea de cal, care fusese tabu până atunci.

Niels Henrik a fost educat de tatăl său, la vicariat, până la vârsta de 13 ani. Pastorul şi-a asumat cu seriozitate responsabilitatea acestei educaţii timpurii. Mai exact, a pregătit un manual scris de mână, pentru uzul copiilor săi. Cartea conţinea gramatică, geografie, istorie şi matematică. În mod surprinzător, prima pagină ce aborda subiectul adunării aritmetice (figura 48) conţinea o eroare colosală: 1 + 0 = 0! Din fericire, lumea matematicii nu şi-a pierdut una dintre stelele cele mai strălucitoare din pricina acestei dezinformări timpurii. În 1815.

Niels Henrik a fost trimis la Şcoala Episcopală din Christiania (oraşul Oslo de astăzi). Viaţa tot mai degradată dintr-o familie în care ambii părinţi alunecau din ce în ce mai mult spre alcoolism, iar mama nu-şi drămuia favorurile sexuale a grăbit probabil plecarea de acasă a băieţelului. Tatăl lui scria: „Fie ca Dumnezeu să-l aibă în pază! Nu-l trimit însă fără nelinişte în suflet în lumea asta depravată”.

Niels Henrik a intrat în Şcoala Episcopală pe la începuturile istoriei acestei instituţii. Cu câţiva ani înainte, deschiderea Universităţii din Christiania îi răpise Şcolii Episcopale cei mai buni profesori, lăsându-i acolo doar pe cei nepregătiţi. Mai ales profesorul de matematică, un anume Hans Peter Bader, era o brută lipsită de inimă, care-i teroriza pe copii şi deseori îşi umplea elevii de vânătăi. Notele lui Niels Henrik au fost la început satisfăcătoare, chiar dacă el manifesta destul de puţin interes în lungile şi pustiile zile de scoală. Avea tendinţă să cadă în depresie atunci când nu era în compania prietenilor, autodiagnosticându-se corect mai târziu: „Întâmplarea face să fiu astfel construit, încât mi-e cu totul imposibil – sau, în orice caz, foarte greu – să accept singurătatea. Devin destul de melancolic şi n-am niciun chef de lucru”. Atunci, ca şi în anii ulteriori, marea lui scăpare de sub povara inevitabilelor plictiseli ale vieţii a fost teatrul. Acolo, el uita de sine şi se contopea cu personajele, nemaifiind nevoit să se lupte cu problemele pentru a căror rezolvare nu avusese niciodată norocul unei călăuziri adecvate. Niels Henrik era timid şi nesigur,

relaţiile sale cu sexul opus rămânând foarte limitate, nu numai în timpul anilor de şcoală, ci până la moarte. Spre sfârşitul lui 1816, performanţele sale şcolare ajunseseră pe o pantă descendentă şi, după mai multe bătăi primite de la Bader, fusese nevoit să întrerupă cursurile pentru o scurtă perioadă. Notele lui deveniseră atât de mici, încât în 1817 nu i s-a îngăduit să treacă clasa decât provizoriu. În noiembrie 1817, un eveniment fatal petrecut la Şcoala Episcopală avea să marcheze o întorsătură spectaculoasă în viaţa lui Abel. Pe 16 noiembrie, un elev, Henrik Stoltenberg, s-a îmbolnăvit de febră nervoasă însoţită de tifos. El a murit o săptămână mai târziu. Opt dintre colegii de clasă ai lui Stoltenberg au declarat în scris că detestatul profesor de matematică Bader nu numai că-l lovise crunt pe elev cu pumnii, dar continuase să-l bată şi când bietul Stoltenberg zăcuse neputincios pe podea. Deşi bătaia n-a fost confirmată drept cauză a decesului de către medicul legist, Bader a fost concediat.

Drept suplinitor, şcoala l-a angajat pe Bernt Michael Holmboe (1795 – 1850), el însuşi absolvent al Şcolii Episcopale, care era cu numai şapte ani mai în vârstă decât Abel. Holmboe a introdus o nouă programă, care începea cu înţelegerea deplină a simbolurilor matematice. Nu i-a trebuit mult ca să descopere că visul oricărui profesor de matematică se realizase în clasa lui – avea pe mână un geniu. După ce a parcurs fluierând programa standard, Abel a început, cu încurajarea entuziastă şi inspiratoare a lui Holmboe, să se cufunde în lucrările originale ale marilor matematicieni Euler, Newton, Laplace, Gauss şi, mai ales, Lagrange. Holmboe nu-şi putea stăpâni admiraţia. În foaia de caracterizare a lui Abel pe anul 1819, nu a ezitat să exclame: „Un geniu matematic remarcabil!” Iar în anul următor, a mers şi mai departe. Evaluarea sa a încălcat toate normele şcolare: „La această genialitate incredibilă, el adaugă un interes şi o ardoare insaţiabile pentru matematică, aşa încât, foarte probabil, dacă va trăi, va deveni unul dintre marii matematicieni”. Ultimele cuvinte fuseseră scrise peste

altele, şterse, care pot fi însă descifrate: „cel mai mare matematician al lumii”. După toate aparenţele, conducerea şcolii insistase ca Holmboe să-şi tempereze lauda. Cuvintele „dacă va trăi” s-au dovedit a fi funest de profetice.

Un geniu luptător

În timpul ultimului său an de şcoală, Abel a făcut prima sa încercare de a-şi deschide aripile – şi ce încercare! Cu temeritatea care-i caracterizează doar pe tineri la prima lor aventură pe teritorii nefamiliare, el a încercat nimic mai puţin decât rezolvarea ecuaţiei cvintice. Aceasta era problema cu care se luptaseră timp de aproape trei sute de ani cei mai buni matematicieni ai Europei, iar acum un puşti de liceu pretindea că ar fi rezolvat-o. Abel i-a arătat soluţia lui Holmboe, care nu găsi nimic greşit în ea. Lipsindu-i încrederea unui matematician recunoscut, Holmboe le-a prezentat-o unor confraţi, Christofer Hansteen şi Soren Rasmussen, de la Universitatea din Christiania. Nici ei nu au găsit vreo eroare. Realizând importanţa descoperirii, Hansteen s-a hotărât să-i înainteze lucrarea celui mai prestigios matematician scandinav al epocii – Ferdinand Degen, din Copenhaga – pentru a fi publicată de către Academia daneză.

Degen era o persoană pragmatică, preferând să greşească fiind prea prudent. Chiar dacă nu a găsit nicio eroare în rezolvarea lui Abel, el i-a cerut acestuia să-i trimită „o deducere mai detaliată a rezultatului său, precum şi o ilustrare numerică” a metodei – de exemplu, o rezolvare a ecuaţiei $x5 + 2\ x4 + 3\ x2 - 4\ x + 5 = 0$. La urma urmelor, şansele *a priori* ca un discipol al Şcolii Episcopale să rezolve una dintre cele mai celebre probleme ale matematicii nu erau foarte mari. În timp ce încerca s-o aplice în cazuri particulare, Abel a descoperit, spre consternarea sa, că metoda era, de fapt, incorectă. Departe însă de a semnala sfârşitul căutării sale, acest impas temporar urma să-l conducă pe Abel spre o monumentală izbândă. Degen, în orice caz, a fost suficient

de impresionat pentru a-i oferi lui Abel sfatul său. Lui Degen, studiul ecuaţiilor i se părea a fi „un subiect steril”. El i-a sugerat lui Abel să-şi concentreze eforturile mai degrabă asupra noului domeniu al integralelor eliptice (tipuri speciale de instrumente matematice din analiză, astfel numite deoarece pot fi folosite pentru a calcula lungimea unui arc de elipsă). Acolo, spunea Degen, „un cercetător serios, cu o abordare adecvată... ar putea descoperi o Strâmtoare a lui Magellan conducând spre vastele întinderi ale unui imens ocean analitic”.

Exact când geniul matematic al lui Abel începuse să strălucească, cerurile se întunecau pe frontul familial. Anii 1818 – 20 aveau să devină din ce în ce mai apăsători pentru Abel. Tatăl său, pastorul, reuşise să se facă ales în Storting (parlament) pe 10 decembrie 1817, dar acest eveniment, aparent prestigios, s-a transformat într-un dezastru complet. La început, foarte energicul parlamentar nou-ales a înaintat câteva proiecte de legi asupra educaţiei, care au fost încununate de succes. În particular, el a jucat un rol important în înfiinţarea unei şcoli veterinare. Dar poate că datorită judecăţii afectate de băutura excesivă şi a unei insaţiabile pofte de autoafirmare a ajuns să comită ceva echivalent cu o sinucidere politică. În timpul unei sesiuni agitate, pe 2 aprilie 1818, i-a acuzat în mod neaşteptat pe doi deputaţi de a-l fi închis pe nedrept pe fostul director al unei întreprinderi metalurgice. Acuzaţiile s-au dovedit total nefondate, marcând astfel începutul căderii pastorului Abel. Lui Soren Georg Abel i s-a dat o ultimă şansă să-şi ceară scuze, pe care el a avut încăpăţânarea s-o refuze. În toamna lui 1818, pastorul dezamăgit şi căzut în dizgraţie s-a întors în Gjerstad. Era din ce în ce mai înclinat să-şi înece supărările în alcool, ceea ce n-a dus decât la o rapidă deteriorare a sănătăţii sale. Când a murit, în 1820, nimeni din Gjerstad nu a fost prea mâhnit. Se spune că văduva, moralmente deficitară, i-ar fi primit stând în pat pe vizitatorii veniţi s-o consoleze, străjuită de un slujitor ale cărui servicii depăşeau treburile gospodăreşti.

Anne Marie şi cei cinci fraţi ai lui Niels Henrik rămaseră cu o mică pensie, complet insuficientă pentru satisfacerea nevoilor personale. Problema banilor care să-i permită lui Abel să-şi încheie educaţia nu putea fi nici măcar ridicată, darămite rezolvată. Prin circumstanţe aproape miraculoase, Abel a reuşit, totuşi, să intre la universitate în 1821. Într-un mediu în care contactul personal dintre studenţi şi profesori era în general descurajat, cei din urmă adoptând o atitudine distantă şi rece, nu mai puţin de trei profesori s-au oferit să-l ajute financiar pe Abel, din resursele lor destul de limitate. Generozitatea aceasta a continuat până în 1824, când el primi, în sfârşit, o bursă din care să trăiască. În primul său an universitar, Abel a fost un oaspete frecvent şi bine-venit în casa profesorului Christopher Hansteen. Într-o revistă periodică de-a acestuia şi-a publicat el prima lucrare matematică, în 1823. N-a fost chiar un articol epocal (şi nici n-a fost, ca şi al doilea articol al lui Abel, pe înţelesul majorităţii cititorilor revistei). În schimb, al treilea său articol, „Soluţia a doua propoziţii prin intermediul integralelor definite" ţintea spre ceea ce mult mai târziu avea să devină baza matematică a radiologiei moderne (pentru care fizicianul Allan Cormack şi inginerul electrotehnist Godfrey Hounsfield au primit în 1979 Premiul Nobel pentru Medicină).

Între timp, profesorii Hansteen şi Rasmussen căutau neîncetat căi de a-l sprijini pe Abel, în particular facilitându-i călătoriile în străinătate, pentru a-şi lărgi orizontul. După ce un astfel de memoriu către Colegiul Academic a dispărut în labirintul birocratic al universităţii, Rasmussen i-a făcut lui Abel un dar personal, de o sută de taleri, pentru a putea călători în Danemarca spre a-i întâlni pe Degen şi pe alţi matematicieni danezi. Oricât de neverosimil ar părea, Abel şi-a petrecut deci vacanţa de vară din 1823 la Copenhaga. Acolo a descoperit că „oamenii de ştiinţă cred că Norvegia este simbolul barbariei pure" şi a făcut tot ce i-a stat în puteri „pentru a-i convinge de contrariu". Excursia la Copenhaga a mai

avut un rezultat neaşteptat – Abel a întâlnit pe viitoarea sa logodnică, Christine (poreclită Crelly) Kemp. Prima întâlnire dintre cei doi a avut loc la o serată organizată în casa unui unchi de-al lui Abel. Abel a invitat-o pe Christine la dans, dar spre jena lui şi a ei, orchestra a început să cânte ceea ce era noua senzaţie a momentului – valsul –, pe care niciunul dintre ei nu ştia să-l danseze. Deconcertaţi, cei doi s-au privit preţ de câteva minute, apoi au părăsit în tăcere sala de dans. Întreaga relaţie a lui Abel cu Crelly are în ea ceva misterios. După ce şi-a petrecut cu ea Crăciunul din 1824, Abel şi-a şocat prietenii de la universitate anunţându-i că se logodise. S-ar părea că el n-a participat niciodată, verbal sau fizic, la vreuna din experienţele erotice care erau tipice pentru viaţa studenţească a capitalei. Logodna la acea vârstă timpurie a ridicat un zid protector, care i-a permis să evite orice alte explicaţii atunci când ceilalţi discutau subiecte legate de femei. Niels Henrik nu s-a căsătorit niciodată cu Christine. Pe vremea aceea, era de neconceput ca cineva să se căsătorească înainte de a avea mijloacele necesare susţinerii unei familii. Din păcate, Abel n-a ajuns niciodată în această situaţie. La cinci ani după logodnă, pe patul de moarte, copleşit de vină şi responsabilitate, Abel avea să-l roage pe bunul său prieten, Baltazar Mathias Keilhau, să aibă grijă de Crelly. „Nu e drăguţă”, fu auzit spunând. „Are păr roşu şi pistrui, dar e o superbă făptură umană”. Keilhau, care până atunci nici nu o văzuse niciodată pe Crelly, s-a căsătorit cu ea în 1830, iar cei doi şi-au petrecut restul zilelor împreună.

Cvintica

După încercarea sa nereuşită de a găsi o formulă de rezolvare a cvinticei, subiectul nu-i mai ieşise niciodată din minte lui Abel. Deşi nu ignora sfatul lui Degen, de a face studii de pionierat în două alte domenii ale matematicii, obsesia cvinticei persista. La întoarcerea sa de la Copenhaga, s-a hotărât deci să revadă acest subiect cu un ochi proaspăt. Dar în loc să atace din nou problema în ideea de a găsi o formulă, era acum hotărât să arate că

ecuaţia nu se putea rezolva printr-o formulă. Amintiţi-vă că exact asta pretindea Ruffini că ar fi demonstrat în perioada 1799 – 1813, fără să bage de seamă că demonstraţia sa conţinea o serioasă lacună. Cum rezultatul lui Ruffini nu avusese parte de multă publicitate, Abel nu era la curent cu el în 1823. După câteva luni de lucru intens, studentul de 21 de ani din îndepărtata Norvegie a pus capăt unei căutări vechi de secole. El a reuşit să demonstreze, riguros, fără ambiguitate, că este imposibil de găsit o soluţie a ecuaţiei cvintice care să poată fi exprimată sub forma unei formule simple, implicând doar cele patru operaţii aritmetice şi radicali.

Să clarificăm mai întâi ce înseamnă şi – la fel de important – ce nu înseamnă demonstraţia lui Abel. El a demonstrat că, în cazul ecuaţiei cvintice generale, şi în cel al ecuaţiilor de grade mai mari, nu poate fi repetat ceea ce se reuşise cu ecuaţiile pătraţice, cubice şi cuartice. Cu alte cuvinte, pur şi simplu soluţia cvinticei nu putea fi dată de o formulă care să înglobeze doar coeficienţii. Toate eforturile depuse de nenumăraţi matematicieni străluciţi fuseseră sisifice. Demonstraţia lui Abel nu implică faptul că ecuaţiile cvintice nu pot fi rezolvate. Ecuaţia x5 – 243 = 0, bunăoară, are soluţia evidentă $x = 3$, deoarece 35 = 243. Mai mult, chiar ecuaţia cvintică generală poate fi rezolvată, fie numeric, cu ajutorul calculatorului, fie introducând mijloace matematice mai avansate, cum sunt funcţiile eliptice. Ceea ce a descoperit Abel a fost un neajuns fundamental al algebrei de bază, care se manifesta la încercările de domesticire a cvinticei. Pur şi simplu, operaţiile bine cunoscute de adunare, scădere, înmulţire, împărţire şi extragere de radicali îşi ating limita utilităţii lor atunci când se confruntă cu cvintica. Aceasta a fost o realizare monumentală în istoria matematicii. Ea a schimbat întreaga abordare a ecuaţiilor, de la simplele încercări de găsire a soluţiilor la necesitatea de a demonstra dacă, în genere, există sau nu soluţii de un anumit tip.

Demonstraţia lui Abel este prea ştiinţifică3 pentru a

fi reprodusă în detaliu într-un text de popularizare. Cititorii cu înclinaţii matematice pot consulta o expunere clară în cartea lui Peter Peste, *Demonstraţia lui Abel.* Aici vom nota doar că demonstraţia se baza pe instrumentul logic numit *reducere la absurd.* Ideea de bază a acestei metode este de a demonstra o propoziţie arătând că propoziţia contrară e falsă. Cu alte cuvinte, Abel a presupus că cvintica e rezolvabilă şi a arătat că această ipoteză conduce la o contradicţie logică.

El era conştient de însemnătatea descoperirii sale. Spre deosebire de lucrările precedente, scrise în inaccesibila norvegiană, a făcut demonstraţia nesoluţionabilităţii cvinticei în franceză, sperând să atragă atenţia principalilor matematicieni ai vremii sale. S-a hotărât, de asemenea, să folosească demonstraţia drept „bilet de clasa!”, socotind că „aceasta ar fi cea mai bună recomandare pe care-aş putea-o avea”. Ca urmare, l-a plătit pe editorul Grondahl din propriul său buzunar (probabil, sărind câteva prânzuri), pentru a scoate articolul sub forma unei broşuri. Pentru a economisi din cheltuielile de tipar, a comprimat acest articol intitulat, *Mémoire sur les équations algébriques où l’on démontre l’impossibilité de la résolution de l’équation générale du cinquième degré (Memoriu asupra ecuaţiilor algebrice în care se demonstrează imposibilitatea rezolvării ecuaţiei generale de gradul cinci*), la numai şase pagini. În schimb, parcimonia lui s-a dovedit costisitoare sub alte aspecte. Versiunea aceasta, foarte prescurtată, aproape telegrafică, a fost atât de opacă pentru majoritatea matematicienilor, încât, deşi Abel trimisese exemplare ale broşurii prietenilor săi din Copenhaga şi marelui Carl Friedrich Gauss, realizarea lui s-a bucurat de prea puţină atenţie. Se pare că Gauss nici nu s-a sinchisit să deschidă broşura lui Abel – după moartea lui, articolul a fost găsit, netăiat pe margini, printre hârtiile sale. Una dintre cele mai mari capodopere ale literaturii matematice nu şi-a găsit practic cititorii.

Cam în aceeaşi vreme, îngerii păzitori ai lui Abel,

adică profesorii Hansteen şi Rasmussen, au conchis că, pentru ca el să-şi folosească întregul potenţial, nu mai era cazul ca ei să-l sprijine din punga lor, şi aşa destul de săracă. Ca urmare, în 1824, ei au solicitat guvernului norvegian o bursă de călătorie pentru Abel, justificându-şi neobişnuita cerere prin observaţia că pentru acest talent extraordinar „o şedere în străinătate, acolo unde se află cei mai de seamă matematicieni, ar contribui nespus de mult la educaţia lui ştiinţifică şi şcolară". După obişnuitele amânări birocratice, departamentul finanţelor i-a aprobat o bursă modestă. Aceasta a fost o realizare cu adevărat remarcabilă, dată fiind situaţia financiară deplorabilă a ţării la acel moment. Se puneau însă şi două condiţii importante. Întâi, lui Abel i se cerea să mai rămână în Norvegia încă 18 luni, pentru „a-şi continua educaţia, în special pentru a studia mai departe limbile străine", ca să fie pregătit pentru călătorie. În al doilea rând – mult mai important după cum se va demonstra –, nicio sumă nu-i era alocată ca sprijin financiar după întoarcerea acasă. Această ultimă condiţie s-a dovedit a avea consecinţe devastatoare.

O experienţă europeană

În septembrie 1825, Abel şi-a luat în sfârşit rămas-bun de la Crelly, care era pe atunci guvernanta copiilor unei familii din orăşelul Son, de lângă Christiania, şi a plecat spre Continent, însoţit de trei prieteni. Doi dinte ei aveau să devină mai târziu geologi, iar al treilea, veterinar. Iniţial, la sfatul lui Hansteen, Abel plănuise să-şi petreacă timpul la Paris, după o scurtă şedere la Copenhaga. Însă atunci când prietenii săi s-au hotărât să meargă la Berlin, spaima de a fi lăsat singur în Paris l-a convins pe Abel să facă şi el un drum până acolo. În acest caz particular, crunta sa teamă de izolare a avut un rezultat fericit. La Berlin, a întâlnit un influent inginer constructor, care avea o mare pasiune pentru matematică şi avea să devină cel dintâi admirator, prieten şi binefăcător al său. August Leopold Crelle (1780 – 1855) n-a prea înţeles la început scopul vizitei tânărului norvegian, care abia vorbea

germana. Într-o scrisoare către Hansteen, Abel descria astfel cele petrecute:

A trecut destul de multă vreme până să-i pot lămuri scopul vizitei mele, iar când m-a întrebat ce citisem până acum din matematică, lucrurile au părut să se îndrepte spre un sfârşit trist. Mi-am făcut curaj şi i-am menţionat operele câtorva dintre cei mai de frunte matematicieni. Atunci a devenit foarte prietenos, după toate aparenţele, realmente fericit. A început cu mine o conversaţie amănunţită, despre diverse probleme dificile, încă nerezolvate. Când am ajuns la cvintică şi i-am spus că demonstrasem imposibilitatea de a i se da o soluţie algebrică generală, nu i-a venit să creadă şi a zis că mă va contrazice. De aceea, i-am dat o broşură, dar a susţinut că nu putea vedea justificarea mai multor concluzii ale mele. Şi alţii spuseseră acelaşi lucru, aşa că mi-am revizuit lucrarea.

În urma acestei întâlniri, Crelle a fondat o revistă matematică, numită de obicei *Revista Crelle* (numele ei oficial era *Revistă de matematică pură şi aplicată*) – prima publicaţie matematică germană din secolul al XIX-lea. Primul număr al *Revistei Crelle* a apărut în 1826 şi conţinea nu mai puţin de şase articole semnate de Abel (scrise în franceză şi traduse de Crelle). Unul dintre ele expunea ceva mai detaliat şi elaborat demonstraţia nerezolvabilităţii cvinticei printr-o formulă simplă. La începutul lui 1826, Abel părea a nu fi încă la curent cu demonstraţia lui Ruffini, dar a descoperit-o, probabil, în vara acelui an, prin intermediul unui rezumat al ideilor acestuia, alcătuit de un autor necunoscut. Într-un manuscris datat 1828 şi publicat postum, Abel notează: „Primul şi, dacă nu greşesc, singurul de dinaintea mea care a încercat să demonstreze imposibilitatea rezolvării ecuaţiilor algebrice este geometrul Ruffini. Dar memoriul lui este atât de complicat, încât e greu de judecat corectitudinea raţionamentului său. Mie mi se pare că el nu este totdeauna satisfăcător”.

În mijlocul acestor impresionante eforturi ştiinţifice,

dura realitate a situaţiei sale financiare continua să-l urmărească pe Abel. Din mijloacele extrem de modeste de care dispunea, continua să-şi ajute fraţii. Într-o scrisoare către doamna Hansteen, el scria:

Dumnezeu să vă binecuvânteze că nu-l uitaţi pe fratele meu [referindu-se la fratele său Peder]. Mă obsedează ideea că lucrurile ar putea lua o întorsătură proastă pentru el. Dacă ar avea cumva nevoie de mai mulţi bani decât are deja, v-aş ruga să-i daţi ceva mai mult. Atunci când cei 50 de taleri se vor fi terminat, voi aranja în aşa fel încât să primiţi mai mulţi.

O afacere ceva mai serioasă avea să arunce o umbră întunecată asupra speranţelor şi perspectivelor de viitor ale lui Abel. Profesorul Rasmussen a considerat că nu-i mai era cu putinţă să jongleze cu responsabilităţile didactice şi obligaţiile sale publice, aşa că a demisionat de la universitate pentru a ocupa un post la Banca Norvegiei. Hotărârea lui îi dădea o oportunitate de aur lui Abel, una la care visase dintotdeauna – o numire la universitate. Existau însă doi candidaţi potenţiali pentru acest post: fostul profesor al lui Abel, Holmboe, şi tânărul Niels Henrik. Când vestea despre locul vacant a ajuns la urechile tinerilor călători la Berlin, unul din ei, Christian Peter Boeck, aspirantul la cariera de veterinar, i-a scris imediat lui Hansteen:

Vărul meu Johan Collett îmi scrie despre numirea la bancă a lui Rasmussen. Ce se va întâmpla cu postul lui? Există vreo speranţă ca Abel să-l poată obţine la întoarcerea sa, sau Holmboe i-o ia înainte? Oricât de rezonabil ar fi acesta sub anumite aspecte, nu pare a fi foarte drept, dat fiind că Abel este, probabil, cu un cap deasupra lui Holmboe.

Scrisoarea a fost scrisă pe 25 octombrie 1825. Membrii facultăţii s-au întrunit pe 16 decembrie, pentru a discuta şi aproba recomandarea pentru noua numire. Ei l-au recomandat pe Holmboe pentru locul vacant. Principalul motiv pentru a-l prefera pe Holmboe în detrimentul lui Abel a fost că acesta din urmă „nu se putea

adapta la fel de uşor capacităţii de înţelegere a tinerilor studenţi precum un profesor mai experimentat, de aceea nefiind în stare să prezinte la fel de fructuos partea elementară a matematicii, care este principalul obiect al postului sus-menţionat”. Acest gen de punere în balanţă a talentului didactic şi aptitudinii pentru cercetare, drept calificări pentru o numire, nu este neobişnuită. Pot depune mărturie din proprie experienţă (am făcut parte din nenumărate asemenea comisii) că discuţii de acest gen continuă să caracterizeze numirile universitare chiar şi în ziua de azi. În acel caz particular însă, în care unul dintre candidaţi era, fără discuţie, net superior celuilalt, este indubitabil că, în miopia ei, facultatea comisese o serioasă eroare. Neignorând complet caracterul problematic al deciziei luate, facultatea norvegiană conchidea: „Socotim, de asemenea, de datoria noastră să subliniem cât de important este ca studentul Abel să nu fie pierdut din vedere”.

Deşi avea speranţele spulberate şi realiza cât de nesigur îi este viitorul, Abel, cu nobleţea care-l caracteriza, a depus toate eforturile pentru a-şi păstra intactă prietenia cu Holmboe. Într-o caldă scrisoare către acesta, el scria: „Printre alte vesti, mi-a spus că dumneata, prietene, ai fost recomandat să predai în locul lui Rasmussen. Primeşte felicitările mele cele mai sincere şi fii sigur că niciunul dintre prietenii dumitale nu a fost atât de bucuros ca mine. Crede-mă, ţi-am dorit întotdeauna o schimbare de situaţie”. Camaraderia dintre Abel şi Holmboe a trecut cu bine acest test, ei rămânând prieteni devotaţi pentru restul vieţii lui Abel. Dezamăgit, Abel s-a simţit însă silit s-o informeze pe Crelly că planurile lor de căsătorie trebuiau amânate.

În ciuda acestor circumstanţe tulburi, iarna aceea la Berlin s-a dovedit una dintre cele mai fericite perioade din viaţa lui Abel. Era extrem de productiv, scriind lucrări importante asupra calculului integral şi a teoriei însumării seriilor infinite. Cei patru viitori oameni de ştiinţă nu pierdeau nicio ocazie de a merge la teatru – pasiunea lui

Abel – şi erau invitaţi la baluri sau organizau serate proprii. Acestea din urmă, care erau uneori destul de zgomotoase, îl deranjau pe faimosul filosof Hegel, care întâmplător locuia în aceeaşi clădire. El a fost auzit o dată numindu-şi zgomotoşii vecini „ursi moscoviţi”.

La apropierea primăverii, Abel a început să facă planuri de călătorie care să-l ducă spre destinaţia sa iniţială – Parisul. Dar teama de a se vedea despărţit de prietenii lui s-a dovedit iarăşi atât de puternică, încât a sfârşit prin a călători mai întâi împreună cu Keihlau la Freiberg, iar apoi împreună cu alţi doi prieteni, prin Dresda, Boemia, Viena, nordul Italiei şi Elveţia, ajungând la Paris abia în iulie 1826.

Parisul

Oricine ajunge la Paris în iulie sau august ştie cum arată el. Aşa cum a descoperit şi Abel curând, toată lumea era în vacanţă, departe de oraş. Totuşi Parisul era capitala matematică indiscutabilă a lumii, iar Abel aştepta cu nerăbdare ocazia de a se întâlni cu giganţii matematici pe care-i venera. La urma urmelor, lucrările lui Cauchy, Laplace şi Legendre constituiau principala lectură de seară a sa. În prima scrisoare trimisă din Paris lui Hansteen, Abel exclama exuberant: „Am ajuns, în fine, în centrul tuturor dorinţelor mele matematice, la Paris”. Nu bănuia că vizita la Paris nu-i va aduce decât dezamăgiri.

Era găzduit de familia Cotte4, la numărul 41 de pe strada St. Marguerite, care traversa faimosul cartier St. Germa-des-Prés. Pentru suma oarecum exagerată de 120 de franci pe lună, beneficia de o cameră „extrem de simplă”, haine curate şi două mese pe zi. Stăpânul casei, care după Abel era un „nedemn diletant în matematică”, l-a însoţit la prima sa încercare de a se întâlni cu faimosul matematician Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833). Din păcate, acesta tocmai se urca în trăsură la sosirea lui Abel, iar cei doi n-au putut schimba decât câteva saluturi de politeţe. Câţiva ani mai târziu, Legendre avea să ajungă să regrete că nu vorbise mai mult cu Abel pe când tânărul matematician se mai afla încă la Paris. (În realitate, ei au

avut un schimb destul de fructuos de idei în 1829, dar deocamdată era anul 1826, iar bătrânul Legendre n-avea nicio idee cine era Abel.)

În timpul primelor luni petrecute la Paris, Abel a lucrat neîncetat la ceea ce avea să devină un adevărat tur de forţă, cunoscut astăzi ca teorema lui Abel. Deşi teorema aceasta nu are legătură directă cu cvintica sau cu teoria grupurilor, datorită rolului decisiv pe care l-a jucat în viaţa lui Abel, încât nicio biografie a sa n-ar fi completă fără ea. Teorema se ocupa de o clasă specială de funcţii, numite *funcţii transcendente*, şi reprezenta o vastă generalizare a unei relaţii obţinute anterior de Euler. Nu e nicio exagerare să spunem că teorema lui Abel a oferit, literalmente, noi perspective lumii matematice. Claritatea şi simplitatea intrinsecă a demonstraţiei lui Abel au fost comparate cu cele ale statuilor clasice ale sculptorului grec Fidias. Originalitatea lui era evidenţiată, printre altele, de îndemânarea de care dădea dovadă în întoarcerea pe dos a problemelor. Voi da un exemplu nematematic pentru acest gen de logică a inversării.

Să presupunem că cineva sugerează că unul dintre motivele pentru care armele de foc sunt atât de răspândite în anumite centre urbane este numărul mare al asasinatelor – oamenii achiziţionează arme pentru a se autoapăra. Problema s-ar pune însă exact invers dacă altcineva ar afirma că una dintre cauzele frecventelor asasinate este disponibilitatea nerestricţionată a armelor. În matematică, putem considera, de exemplu, relaţia $x = \sqrt{y}$ (citită „x este egal cu rădăcina cubică din y”). Ea arată că, pentru a-l calcula pe x, trebuie să extragem rădăcina cubică din y, ca în $2 = \sqrt{8}$. Relaţia inversată $y = x3$ (deci $8 = 23$) este echivalentă cu cea precedentă, şi totuşi cei mai mulţi vor fi de acord că a calcula puterea a treia e mult mai uşor decât a manipula rădăcini cubice. Acesta a fost tipul de idee oferit de Abel prin teorema sa, unul care îi scăpase lui Legendre în cei aproape 40 de ani de lucru.

Lucrarea lui Abel s-a dovedit a fi una dintre cele mai lungi publicaţii ale sale (ea umple 67 de pagini în operele

lui complete).

Această remarcabilă lucrare, intitulată *Mémoire sur une propriete générale d'une classe très étendue des fonctions transcendantes* (*Memoriu asupra unei proprietăţi generale a unei clase foarte extinse de funcţii transcendente*), conţinea atât teoria, cât şi aplicaţiile. La încheierea ei, Abel abia îşi putea stăpâni euforia. Extrem de optimist, a depus-o la Academia Franceză de Ştiinţe, pe 30 octombrie 1826. Aceasta era lucrarea, gândea, care avea să-i fie paşaportul spre recunoaştere. Abel a fost efectiv prezent la Institutul Franţei, la şedinţa de prezentare a lucrării. A ascultat cu un mare sentiment de împlinire atunci când secretarul academiei, matematicianul Joseph Fourier (1768 – 1830), i-a făcut o scurtă expunere. Cauchy şi Legendre au fost imediat numiţi ca referenţi, iar Cauchy a primit sarcina să redacteze un raport către academie.

Abel şi-a petrecut următoarele două luni la Paris, aşteptând cu nerăbdare verdictul. Se simţea din ce în ce mai singur, mai trist şi mai anxios: „Deşi mă aflu în locul cel mai zgomotos şi mai plin de viaţă de pe continent", îi scria el lui Holmboe, „mă simt de parc-aş fi într-un desert. Nu cunosc aproape pe nimeni". În parte, probabil că i se părea greu să comunice cu oamenii din cauza stării de melancolie în care cădea atunci când nu era înconjurat de prieteni:

În ansamblu, francezii nu-mi plac la fel de mult ca nemţii; francezii sunt extrem de rezervaţi faţă de străini. Este foarte dificil să te apropii de ei, şi nici nu sper s-o fac. Fiecare lucrează pentru sine, fără să-i pese de ceilalţi. Toţi vor să te instruiască, şi nimeni nu vrea să înveţe. Pretutindeni domneşte egoismul cel mai absolut.

Ca întotdeauna, teatrul rămânea principala lui sursă de amuzament şi bucurie: „Nu ştiu plăcere mai mare decât să văd o piesă de Molière în care joacă Mademoiselle Mars [cea mai bună actriţă a timpului, Anne-Françoise-Hippolyte Boutet, cunoscută sub numele de

Mars]. Sincer, sunt extrem de entuziasmat", scria el.

Celelalte „atracţii” ale Parisului secolului al XIX-lea îl lăsau rece:

Din când în când vizitez Palais Royal (figura 49), pe care francezii îl numesc un lieu de perdition [un loc de pierzanie]. Vezi acolo des femmes de bonne volonté [femei „de bunăvoinţă”] în număr mare şi ele nu sunt deloc sâcâitoare. Singurul lucru pe care-l auzi este: Voulez-vous monter avec moi? Mon petit a-mi, petit méchant. [Vrei să vii sus cu mine? Micuţul meu, răutăciosule mic.] Fiind logodit, nu le ascult niciodată şi părăsesc Palais Royal fără cea mai mică ispită.

Unul dintre compatrioţii întâlniţi de Abel la Paris era pictorul danez Johan Gorbitz. Gorbitz lucra în atelierul faimosului pictor de tablouri istorice Jean-Antoine Gros şi se afla la Paris din 1809.

El a realizat în iarna aceea singurul portret autentic al lui Abel pictat în cursul vieţii sale (figura 50). Portretul zugrăveşte un tânăr drăgălaş, cu trăsături delicate. Deşi mama lui Abel fusese o femeie de o mare frumuseţe, niciunul dintre contemporanii săi nu-l descriu ca arătând deosebit de bine. Măgulitorul portret ar putea reprezenta deci tendinţa spre înfrumuseţare a pictorilor vremii.

Poate că cea mai bună imagine a complexului mod de lucru al minţii creator-rătăcitoare a lui Abel este dată de carnetul său de notiţe parizian. Printre formulele diverselor integrale şi expresii cu numere complexe, găsim o menajerie de nonsensuri şi fragmente de fraze, care sar neîncetat de la un şuvoi de gânduri la altul. Pagina reprodusă în figura 51, de exemplu, conţine (fără nicio ordine particulară) următoarele frânturi de fraze: „... soluţia completă a ecuaţiilor în care... afurisit... afurisit, [semnul pentru infinit]”; „Tatăl nostru care eşti în Ceruri, dă-mi mie pâinea şi berea. Ascultă-mă o dată”, referindu-se, poate, la situaţia sa financiară tot mai proastă; „Vino la mine, pentru Dumnezeu”; „Draga mea, iubita mea”; „Spune-mi, draga mea Eliza... ascultă... ascultă”, referindu-se fie la iubita lui soră Elizabeth, căreia îi trimisese un dar de la Paris, fie la vreo prietenă intimă,

idee implicată de ultimele cuvinte de mai jos: „Soliman al Doilea”, cu referire la sultanul otoman din secolul al XVII-lea – Abel se documentase intens asupra istoriei europene înaintea excursiei sale în Europa; „Vino la mine, scumpa mea”; „de data asta, a mea”; „soluţii ale ecuaţiilor algebrice”; „Vino la mine cu toată disoluţia ta”.

Abel era extrem de optimist în ceea ce priveşte lucrarea înaintată Academiei, fiind absolut convins că avea să urmeze un raport laudativ. La urma urmei, presupunea el, e cert că acei mari matematicieni aveau să recunoască valoarea lucrării. Ceea ce nu realiza însă era faptul că cei doi matematicieni numiţi ca evaluatori erau, din motive diferite, total nepotriviţi pentru

acea sarcină. Legendre avea în acel moment 72 de ani şi îi lipsea răbdarea să parcurgă un manuscris lung, care era (cu propriile-i cuvinte) „abia lizibil… scris cu o cerneală foarte subţire, cu literele prost alcătuite”. Cauchy, pe de altă parte, era în apogeul fazei sale egocentrice, sau, apelând la cuvintele istoricului Eric

Temple Bell, „atât de ocupat cu a-şi depune propriile ouă şi a cloci deasupra lor, încât nu mai avea timp să examineze adevăratele ouă de cuc pe care modestul Abel le lăsase în cuibul lui”. Rezultatul acestor circumstanţe nefericite a fost că Legendre nu şi-a bătut capul, iar Cauchy a rătăcit memoriul undeva printre vrafurile sale de hârtii, uitând de el. Închipuiţi-vă, o adevărată capodoperă – la fel de însemnată, poate, ca şi tabloul lui Monet *Impresie*: *Răsărit de soare* pentru dezvoltarea impresionismului – astfel rătăcită şi pierdută! Abia doi ani mai târziu avea Legendre să afle de conţinutul manuscrisului, dintr-o corespondenţă cu Abel, întors pe atunci în Norvegia.

Altă persoană care s-a familiarizat în 1829 cu lucrarea lui Abel a fost marele matematician german Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851). Pe 14 martie 1829, el îi scria cu neascuns entuziasm lui Legendre:

Ce mai descoperire a făcut Herr Abel prin generalizarea integralei lui Euler! S-a mai văzut oare ceva asemănător până acum? Cum este însă cu putinţă ca descoperirea aceasta, poate cea mai importantă din secolul nostru, să fi scăpat atenţiei dumneavoastră şi a colegilor dumneavoastră, după ce a fost comunicată Academiei cu peste doi ani în urmă?

Scuza şchioapă, invocând caracterul „abia lizibil” al manuscrisului, a fost prezentată de Legendre ca răspuns la această perplexă întrebare.

Abel a mai petrecut două luni la Paris, cu resursele tot mai secătuite, dispoziţia din ce în ce mai sumbră şi sănătatea zdruncinată. Nu a mai făcut decât două noi cunoştinţe notabile. Una dintre ele era matematicianul Johann Dirichlet (1805 – 1859), care, deşi mai tânăr decât Abel, îşi făcuse deja un nume demonstrând (împreună cu Legendre) Marea Teoremă a lui Fermat pentru cazul $n = 5$. (Cu alte cuvinte, demonstrase că nu există numere întregi x, y, z aşa încât $x5 + y5 = z5$.) A doua a fost Jacques Frédéric Saigey, editor al revistei de astronomie şi matematică *Bulletin de Ferrussac,* pentru care Abel scrise mai multe articole, în esenţă rezumându-şi lucrările din

Revista Crelle.

Abel începuse să sufere de ceea ce credea că este o simplă răceală, şi trebuie să fi consultat mai mulţi medici. Doi ani mai târziu, aflat pe patul de moarte, va fi auzit exclamând: „Puteţi vedea că nu era adevărat ceea ce mi-au spus la Paris – sigur n-am oftică”. De aici putem deduce că diagnosticul medicilor francezi fusese alarmant – tuberculoză. Refuzând să recunoască la acea vreme cât de gravă îi era starea de sănătate, cu speranţele spulberate şi fondurile pe sfârşite, Abel s-a hotărât să părăsească Parisul, plecând pe 26 decembrie spre Berlin.

La scurt timp după sosirea sa la Berlin, a căzut la pat. Acestea erau probabil primele semne de deteriorare rapidă a sănătăţii sale. Crelle a făcut tot ce-a putut pentru a-l ajuta financiar pe Abel, care a primit, de asemenea, un împrumut de la Holmboe. Printr-un miracol, nici necazurile economice, nici sănătatea care i se înrăutăţea văzând cu ochii nu l-au împiedicat să-şi finalizeze cea mai amplă publicaţie de până atunci – „Cercetare asupra funcţiilor eliptice” ocupă 125 de pagini din volumul de opere complete. Lucrarea prezenta o imensă generalizare a funcţiilor trigonometrice obişnuite (de ex., sinusul, cosinusul), având importante ramificaţii chiar şi înspre teoria numerelor. Crelle a încercat să-l convingă pe Abel să rămână la Berlin până când i-ar fi putut obţine un post acolo. Abel era însă obosit şi chinuit de dorul de ţară. Pe 20 mai 1827, greu îndatorat şi fără nicio perspectivă de a-şi găsi un post, s-a întors la Christiania.

Întoarcerea acasă

Situaţia găsită în 1827 la Christiania a confirmat cele mai rele temeri ale lui Abel. Amintesc că bursa pe care o primise nu avea nicio prevedere privind vreo sponsorizare a lui în Norvegia. După ce Departamentul Finanţelor i-a respins cererea de prelungire a bursei, universitatea a reuşit să-i asigure un mic stipendiu din care să trăiască (nu înainte ca Departamentul Finanţelor să-şi rezerve dreptul de a deduce această sumă din câştigurile viitoare ale lui Abel.) Chiar şi cu acest sprijin, pentru a putea face faţă,

Abel a fost silit să dea meditaţii unor elevi de scoală. Crelly, logodnica lui, a ocupat un nou post de guvernantă la o oarecare familie Smith, care era proprietara unor întreprinderi metalurgice din Froland, în sudul Norvegiei.

Începutul lui 1828 a adus cu el îmbunătăţiri financiare importante. Profesorul Hansteen reuşise să obţină un grant mare pentru studierea câmpului magnetic terestru, dându-i astfel posibilitatea lui Abel să devină înlocuitorul lui temporar atât la universitate, cât şi la academia militară. Totodată, Abel s-a trezit cuprins de o frenetică dorinţă de a publica – cum nu mai cunoscuse nicicând înainte. Luna septembrie 1828 a fost martora apariţiei nu a una, ci a doua lucrări asupra funcţiilor eliptice. Cea dintâi reprezenta prima parte din masivul „Cercetare asupra funcţiilor eliptice", iar cealaltă anunţa rezultate obţinute în acest domeniu de tânărul matematician german Jacob Jacobi. Apoi, pentru a nu fi întrecut, Abel s-a repezit să publice şi a doua parte a manuscrisului, căruia i-a adăugat o notă, menită să arate cum rezultatul lui Jacobi putea fi obţinut din al lui. Mai important din perspectiva acestei cărţi, el a încetat să mai lucreze la ceea ce ar fi trebuit să fie răspunsul său definitiv la întrebarea care ecuaţii pot fi rezolvate prin intermediul formulelor. Aceasta lăsa uşa deschisă unui alt tânăr genial – Evariste Galois – pentru a da răspunsul şi a introduce cu acest prilej teoria grupurilor.

Recunoaşterea geniului lui Abel începuse să se răspândească acum prin toată Europa. Legendre, care începuse să corespondeze atât cu el, cât şi cu Jacobi pe tema teoriei funcţiilor eliptice, a declarat că „prin aceste lucrări, voi doi [Abel şi Jacobi] veţi fi aşezaţi printre analiştii cei mai de frunte ai vremii noastre". Pe lângă faima matematică, şi realitatea situaţiei economice precare a lui Abel începuse să ajungă la urechile anumitor matematicieni europeni, mai ales datorită eforturilor neobositului Crelle. Într-o acţiune de sprijin fără precedent, patru eminenţi membri ai Academiei Franceze de Ştiinţe i-au scris regelui

Carol al XIV-lea al Norvegiei şi Suediei, cerându-i să facă în aşa fel încât să fie înfiinţat un post potrivit cu talentele lui Abel. Demersul nu a avut niciun rezultat.

Abel şi-a petrecut vara lui 1828 în Froland, împreună cu Crelly şi familia Smith. Acesta era un loc unde, cu cuvintele lui, se simţea „printre toţi îngerii”. Hanna Smith, una dintre fete, pe atunci în vârstă de 20 ani, l-a caracterizat mai târziu, în amintirile ei, ca fiind în general vioi şi jucăuş. Ea face o emoţionantă descriere a felului în care obişnuia Abel să stea cu hârtiile sale, înconjurat de doamnele casei, transcriindu-şi manuscrisele pe hârtia poştală cea mai subţire, pentru a economisi costul expedierii.

Termenii dezastruoşi impuşi de stipendiul alocat cu doi ani înainte lui Abel reveniseră pentru a-l hăitui. Ministrul Finanţelor insista ca „avansul sus-menţionat să fie dedus în rate adecvate din salariul domnului Abel”. Deşi universitatea a refuzat să urmeze aceste instrucţiuni nemiloase, fondurile lui Abel se topeau ca un bulgăre de zăpadă. El şi-a încheiat unul dintre biletele adresate doamnei Hansteen în vara aceea cu „A dvs. cea mai lovită de sărăcie creatură”, iar un altul, cu „Sunt la fel de sărac ca un şoarece de biserică… Al dvs. distrus”.

În toamna lui 1828, el a revenit la Christiania, pregătindu-se pentru începerea noului an şcolar. Dar în septembrie, timp de câteva săptămâni a fost atât de bolnav, încât a trebuit să rămână la pat. Cu toate acestea, la mijlocul lui decembrie, în timpul unei ierni deosebit de friguroase, a nesocotit sfatul surorii sale şi a plecat din nou spre Froland, pentru a petrece Crăciunul cu logodnica lui. S-a îmbolnăvit la puţin timp după Crăciun, începând să tuşească până la epuizare. În ciuda stării sale de slăbiciune, a reuşit să producă un foarte scurt rezumat al lucrării concepute la Paris (care se temea că s-ar fi pierdut definitiv), pe care l-a trimis *Revistei Crelle.* Pe 9 ianuarie, când s-a văzut clar că începuse să scuipe sânge, a fost chemat în ajutor medicul de district. Acesta a ezitat să pronunţe temutul cuvânt „tuberculoză”, care era efectiv o

condamnare la moarte, dându-i diagnosticul de pneumonie. Următoarele câteva luni s-au transformat într-un oribil coşmar pentru toţi cei implicaţi. Crelly şi cele două fete mai mari ale familiei Smith făceau cu rândul de gardă la patul lui. În timpul chinuitoarelor nopţi de nesomn, Abel a fost auzit blestemând întreaga tagmă medicală, pentru a nu fi făcut suficiente progrese ca să-l poată ajuta. Zilele nu erau nici ele mult mai bune. Abel avea să şoptească de mai multe ori că matematicianul Jacob Jacobi era persoana care putea pricepe cel mai bine valoarea operei lui. Uneori, el aluneca spre autocompătimire şi se plângea amar de sărăcia care-i fusese cel mai constant camarad. Pe măsură ce iarna se scurgea, vorbea zilnic tot mai răguşit, până la punctul în care cuvintele îi deveneau abia inteligibile pentru cei din jur. În prag de aprilie, condiţia lui s-a deteriorat vizibil. După o noapte de chinuri, tânărul geniu norvegian şi-a dat sufletul, pe 6 aprilie la orele 4 ale după-amiezii, cu Crelly şi una dintre surorile Smith la căpătâiul său. Avea 26 de ani. Distrusă, Crelly îi scria doamnei Hansteen pe 11 aprilie: „Abel al meu e mort! Am pierdut totul pe Pământ. Nimic, nimic nu mi-a rămas”.

Pe 8 aprilie, neştiind încă de moartea lui Abel, Crelle i-a scris plin de jubilaţie şi entuziasm de la Berlin: „Acum, dragul şi preţiosul meu prieten, îţi pot aduce veşti bune. Ministerul Educaţiei a hotărât să te cheme la Berlin, ca să te angajezi aici”. Abel a fost înmormântat în Froland, pe 13 aprilie 1829, la o zi după o puternică furtună. Prietenii săi i-au plătit piatra de mormânt. În necrolog, Crelle a scris:

Toată opera lui Abel e modelată de o excepţională strălucire şi forţă de gândire… Dificultăţile par să dispară în faţa atacului victorios al geniului său. Dar nu numai marele său talent e cel care face dispariţia lui extrem de regretabilă. El s-a distins, în egală măsură, prin puritatea şi nobleţea caracterului şi printr-o excepţională modestie, pentru care persoana i-a fost la fel de îndrăgită ca şi geniul.

Pe 28 iunie 1830, Academia Franceză de Ştiinţe a

anunţat că Marele Premiu pentru Matematică avea să le fie conferit în comun lui Abel şi Jacobi.

Care a fost însă destinul memoriului parizian al lui Abel? În urma schimbului de scrisori dintre Jacobi şi Legendre şi a intervenţiei consulului norvegian la Paris, Cauchy a reuşit să dezgroape în cele din urmă manuscrisul, în 1830. Dar vor trebui să mai treacă 11 ani pentru ca el să ajungă la tipar. În sfârşit, ca o concluzie aproape comică la această *saga* a neglijenţei, manuscrisul a dispărut din nou în timpul procesului de tipărire, pentru a reapărea abia în 1952, la Florenţa.

În 2002, guvernul norvegian a instituit un fond de 22 de milioane de dolari pentru conferirea Premiului Abel pentru matematică5. Acesta este prezentat în stilul Premiului Nobel, de către regele Norvegiei. Primul premiu, în valoare de 816.000 de dolari, a fost acordat pe 3 iunie 2003 faimosului matematician francez Jean-Pierre Serre; al doilea a revenit, pe 25 mai 2004, altor doi – Sir Michael Francis Atiyah de la Universitatea din Edinburgh şi Isadore M. Singer de la Massachusetts Institute of Technology. Premiul a adus, în sfârşit, în atenţia publică numele matematicianului care a demonstrat că o anumită ecuaţie nu poate fi rezolvată printr-o formulă. În mod ironic, opera strălucită a celui mai sărac matematician este celebrată printr-o recompensă financiară uriaşă.

A existat o întâlnire care n-a avut niciodată loc la Paris în acea toamnă tristă a anului 1826. Necunoscut lui Abel, un tânăr matematician francez care trăia la distanţă de numai câţiva kilometri, începea să fie obsedat de exact aceeaşi problemă care-l preocupase atâta pe norvegian. Putea fi cvintica rezolvată printr-o formulă? Sau, mai general, care ecuaţii puteau fi rezolvate printr-o formulă? Evariste Galois nu avea decât cincisprezece ani în perioada şederii lui Abel la Paris, dar începuse deja să devoreze cărţi de matematică, de parcă ar fi fost romane de aventuri. Din păcate, nu vom şti niciodată cum s-ar fi schimbat viaţa acestor doi oameni cu stea în frunte în urma unei întâlniri dintre ei. Un singur lucru e cert: Dacă

se poate concepe o poveste şi mai tragică decât a lui Abel, aceasta este cea a lui Galois.

5

Matematicianul romantic

I

n dimineaţa zilei de 30 mai 1832, un singur glonţ tras de la o distanţă de 25 de paşi l-a nimerit pe Evariste Galois în stomac. Deşi rănit mortal, el nu şi-a dat sufletul. A rămas căzut la pământ până ce un bun samaritean anonim, poate un fost ofiţer, l-a luat şi l-a dus la Spitalul Cochin din Paris. A doua zi, avându-l alături pe fratele său mai mic Alfred, Galois a murit de peritonită. Ultimele lui cuvinte cunoscute au fost: „Nu plânge; trebuie să-mi fac curaj ca să mor la 20 de ani”. Acesta a fost tristul sfârşit al celui mai vizionar dintre toţi matematicienii – neverosimilă combinaţie dintre un geniu, precum Mozart, şi un romantic, precum lord Byron, totul înserat într-o poveste care rivalizează în jalea ei cu cea a lui Romeo şi Julieta.

Galois – primii ani

Evariste Galois s-a născut1 în noaptea de 25 octombrie 1811 şi a fost botezat după sfântul celebrat pe 26 octombrie (figura 52 îi prezintă certificatul de naştere, iar Anexa 8 îi dă arborele genealogic extins). Tatăl său, Nicolas-Gabriel Galois (figura 53), era un om educat, care conducea pe vremea aceea o scoală destul de vestită de băieţi din Bourg-la-Reine (astăzi o suburbie a Parisului) – post pe care-l moştenise de la bunicul lui Evariste. În timpul liber, Nicolas-Gabriel compunea versuri sarcastice şi amuzante piese de teatru, care îl făceau un oaspete bine-venit la seratele vremii. Mama lui Evariste, Adélaïde Marie Demante, fiica unui jurisconsult de la Facultatea de Drept din

Figura 52

Paris, era ea însăşi versată în studiile clasice. Familia Demante trăia aproape peste drum de numărul 54 de pe Grande Rue – casa familiei Galois (figura 54 arată această casă, pe vremea când ea încă mai exista).

La mijlocul erei napoleoniene, Nicolas-Gabriel era un supus leal al împăratului. Fratele său mersese chiar până la a deveni ofiţer al Gărzii Imperiale. Timpurile postrevoluţionare au fost însă extraordinar de tulburi, iar după colosala înfrângere din Rusia, Napoleon fusese silit să abdice în 1814, în favoarea regelui Ludovic al XVIII-lea din dinastia de Bourbon. Practicile megalomane ale acestui rege, care erau însoţite de o restaurare treptată a puterii bisericii, au fost suficiente pentru a reaprinde loc (figura 55 prezintă un echivalent al unui actual document de împuternicire). Schimbările frecvente de conducere şi natura cameleonică a climatului politic contribuiau la

polarizarea societăţii franceze în două tabere destul de distincte. La stânga, se situau liberalii şi republicanii, animaţi în special de idealurile antrenante ale Revoluţiei Franceze. La dreapta, erau „legitimiştii" sau aşa-numiţii *ultras* (prescurtare de la ultraregalişti), al căror model statal era o monarhie dominată de biserică.

Ca şi Abel, Évariste a fost educat întâi acasă. Adélaïde Marie le-a oferit copiilor săi o solidă pregătire în direcţia studiilor clasice şi religioase, transmiţându-le totodată idei liberale. Chiar şi după a zecea aniversare a băiatului, mama lui Évariste şi-a regretat intenţia iniţială de a-l trimite la o scoală din Reims şi s-a hotărât să-l mai ţină încă doi ani acasă.

În octombrie 1823, Évariste şi-a părăsit, în sfârşit, casa părintească, pentru a se duce la Liceul-internat Louis-le-Grand2 din Paris. Această prestigioasă instituţie existase încă din secolul al XVI-lea şi număra printre absolvenţii ei oameni iluştri, precum revoluţionarul Robespierre şi romancierul Victor Hugo. Înainte Figura 54 de înscrierea lui Galois, liceul se distinsese prin aceea că rămăsese deschis în vremurile tumultuoase ale Revoluţiei Franceze. În ciuda preeminenţei sale academice, el era găzduit într-o clădire cu aspect de închisoare, având o disperată nevoie de restaurare. Elevii ofereau o excelentă reprezentare a întregului spectru politic al societăţii niza o reţetă sigură pentru tulburări. Revoltele, certurile dintre ei °i dezordinile reprezentau normalitatea la Louis-le-Grand. Nesupunerea era alimentată şi de disciplina mai mult decât militară impusă elevilor. Spartanul program zilnic începea la 5, 30 dimineaţa şi se încheia la ora 20, 30 fix, era meticulos structurat şi nu îngăduia decât foarte puţin timp liber. Tăcerea era impusă chiar şi la masă, iar meniul era extrem de sărăcăcios. Micul dejun, bunăoară, consta din pâine goală şi apă.

În sălile de clasă, elevii stăteau câte doi pe treptele goale, la lumina lumânării, câte una pentru fiecare pereche. Imaginea şobolanilor traversând sala de clasă în timpul lecţiilor era atât de comună, încât nu mai atrăgea

atenţia. Cea mai uşoară deviere de la rutina obligatorie – chiar şi simplul refuz al unui fel de mâncare – ducea la recluziune solitară, într-una din cele 12 celule speciale. Una peste alta, trecerea de la atmosfera fericită şi paşnică de acasă la mediul violent şi restrictiv al liceului trebuie să fi fost destul de şocantă pentru Galois.

Evariste a ajuns la Louis-le-Grand la scurtă vreme după numirea conservatorului Nicolas Berthot pe post de director. Elevii bănuiau că numirea sa era primul pas al unei încercări de a împinge liceul înapoi, spre rădăcinile sale iezuite. Ei şi-au exprimat nemulţumirea refuzând să cânte la slujbele din capelă şi ignorând toasturile uzuale pentru Ludovic al XVIII-lea şi alţi demnitari, la un banchet al liceului, dat pe 28 ianuarie 1824.

Reacţia a fost rapidă şi dură – 117 elevi au fost daţi afară imediat. Galois, care era chiar la începutul stagiului său, nu a fost implicat, dar neîndoios, întâmplarea l-a afectat enorm.

În ciuda condiţiilor umilitoare şi a disciplinei inuman de stricte, primii doi ani ai lui Evariste la Louis-le-Grand au fost caracterizaţi de un considerabil succes. Pregătirea deosebită primită de la mama sa în domeniul studiilor clasice s-a oglindit curând în distincţii pentru naraţiune latină şi traducere din greacă. La examenul-concurs de cultură generală, a primit şi premiul pentru matematică. Cu toate acestea, mediul nefavorabil îşi lua uiumul. Iarna umedă 1825 – 26 i-a adus o puternică durere de urechi, care a persistat luni de zile, necontribuind la îmbunătăţirea dispoziţiei în general depresive a lui Galois. Despărţirea de tatăl său, împreună cu care se obişnuise să guste schimburi de cuplete pline de duh, era deosebit de dură pentru el. Ca urmare, rezultatele lui şcolare au început să fie mai proaste.

În afara zidurilor şcolii, evenimentele se desfăşurau cu rapiditate. Ludovic al XVIII-lea a murit în septembrie 1824 şi a fost urmat de fratele său, care şi-a luat numele de Carol al X-lea. Tranziţia a fost marcată de o dramatică creştere a influenţei clerului şi a extremei drepte. Cei

dovediţi că ar fi comis acele dubios definite „crime împotriva religiei” erau acum pasibili de pedeapsa cu moartea.

Naşterea unui matematician

j

Toamna lui 1826 a fost martora primului eşec umilitor al lui Galois. Era la clasa de retorică. Deşi eforturile lui sârguincioase, dar lipsite de entuziasm fuseseră în general bine apreciate de profesorul său, noul director ultraconservator Pierre-Laurent Laborie avea idei oarecum diferite. În rigida lui opinie, Galois era prea tânăr pentru acea clasă avansată, care cerea „o judecată ce nu vine decât odată cu maturitatea”. În ianuarie, Galois a fost aşadar silit, spre consternarea sa şi a tatălui său, să repete a treia clasă de liceu. Expresii ca „original şi bizar” sau „bun, dar ciudat” au început să apară în rapoartele care-i descriau caracterul. Experienţa neplăcută cu retorica s-a dovedit însă a fi o binecuvântare deghizată – Galois a descoperit matematica. Figura 56 arată un portret al lui Galois cam din acea vreme, desenat de un coleg de clasă.

Noul profesor de matematici preparatoare, Monsieur Hippolyte Vernier, a hotărât să introducă o nouă carte pentru studiul geometriei. Aceasta era *Elemente de geometrie,* a lui Legendre, care apăruse pentru prima dată în 1794 şi devenise rapid folosită în întreaga Europă. Textul acesta, devenit astăzi clasic, rupea oarecum plicticoasa tradiţie euclidiană a geometriei de liceu. Legenda spune că, în lăcomia sa de matematică, Galois a „înghiţit” întreaga carte a lui Legendre în numai două zile, cu toate că aceasta trebuia să acopere întregul curs, de doi ani. Deşi exactitatea acestei (probabil exagerate) relatări este imposibil de verificat, e cert că, prin toamna lui 1827, Galois îşi pierduse complet interesul pentru orice altceva, devenind pasionat de matematică. Profesorul lui de retorică a început prin a-i înţelege greşit nepăsarea, descriindu-i performanţele neinspirate prin cuvintele: „În tot ceea ce face, nu există decât stranii fantezii şi neglijenţă”. Dar, după al doilea trimestru, tot el a

concluzionat în mod corect că: „Se află sub fascinaţia matematicii. Cred că i-ar face bine ca părinţii să nu-i permită să studieze altceva”. Cel de-al treilea trimestru n-a făcut decât să confirme acest verdict: „Dominat de pasiunea lui pentru matematică, a neglijat complet orice altceva”.

Galois era, într-adevăr, vrăjit. A dat deoparte manualele obişnuite şi s-a dus direct la lucrările originale. Galopând de la un articol profesional de matematică la altul, aşa cum un băieţaş obişnuit ar face-o azi cu volumele povestirilor lui Harry Potter, s-a cufundat cu totul în memoriile lui Lagrange, *Rezolvarea ecuaţiilor algebrice* şi *Teoria funcţiilor analitice.* Această experienţă formativă l-a condus spre o ambiţioasă tentativă. Fără să fie deloc la curent cu lucrările lui Ruffini şi Abel, a încercat timp de două luni să rezolve cvintica. Dar exact ca şi tânărul norvegian, şi el a crezut la început că găsise formula, doar pentru a fi dezamăgit mai târziu, când a găsit o eroare în soluţia sa. Figura 57 prezintă o notă editorială ulterioară, referitoare la faptul că eroarea lui Abel (de a fi crezut că rezolvase cvintica) fusese repetată de Galois şi că „aceasta nu e singura analogie frapantă3 dintre geometrul norvegian muritor de foame şi geometrul francez condamnat să trăiască sau să moară… în spatele zăvorului unei temniţe”. Ca şi în cazul lui Abel, acest eşec minor n-a făcut decât să-l impulsioneze pe Galois spre chestiuni mai importante legate de rezolvabilitatea cvinticei.

Dar piedici mai serioase aveau să i se ivească în cale, unele datorate lui Galois însuşi. Aşa cum Monsieur Vernier diagnosticase pe bună dreptate, în ciuda geniului şi imaginaţiei sale creatoare, Galois n-a fost niciodată capabil să studieze metodic şi să lucreze sistematic. Extrem de avansat în anumite subiecte, era lipsit de cele mai fundamentale baze în altele. Ignorându-şi lipsurile şi făcând pe surdul la sfatul lui Vernier, el a încercat plin de curaj, în iunie 1828, să ia cu un an mai devreme examenul de admitere la legendara École Polytechnique. Aceasta fusese fondată în 1794, drept principală instituţie de

pregătire a inginerilor şi oamenilor de ştiinţă. Lagrange, Legendre, Laplace şi alţi savanţi faimoşi făcuseră parte, la un moment sau altul, din corpul ei profesoral. Şcoala era faimoasă şi pentru atmosfera ei liberală. Dacă Galois ar fi trecut examenul, Politehnica ar fi fost solul perfect pentru a-i hrăni spiritul gata să-şi ia zborul. Aşa cum era însă de aşteptat, datorită pregătirii sale inadecvate, Galois a ratat examenul. Aşteptarea înşelată atunci a fost, poate, germenele sentimentului său ulterior de persecuţie, care avea să crească până la dimensiuni clar paranoice.

Silit să-şi continue studiile la Liceul Louis-le-Grand, Galois s-a înscris în clasa specială de matematică a lui Louis-Paul-Émile Richard (1795 – 1849). Richard s-a dovedit a fi, pentru Galois4, ceea ce fusese Holmboe pentru Abel – un profesor şi un susţinător, furnizor de inspiraţie şi motivaţie. Richard nu era un matematician strălucit, dar era la curent cu ultimele dezvoltări din domeniu. El a recunoscut de îndată capacităţile neobişnuite ale lui Galois şi l-a încurajat să se angajeze în cercetări originale, afirmând plin de entuziasm că „elevul acesta este net superior tuturor colegilor săi". El a mai notat că „elevul acesta nu studiază decât matematica". Exact aşa cum mama şi sora lui Picasso, pe deplin conştiente de remarcabilele lui talente, au păstrat toate desenele lui din copilărie, şi Richard a pus deoparte 12 carnete cu temele de clasă ale lui Galois. Aceste documente au sfârşit prin a ajunge în biblioteca Academiei de Ştiinţe. Un alt matematician pe care Galois l-a întâlnit cam în aceeaşi perioadă a fost Jacques-François Sturm (1803 – 1855). Sturm avea să fie mai târziu unul dintre puţinii care să recunoască imediat că ideile lui Galois erau diamante în stare brută.

În 1829, Galois şi-a publicat primul articol matematic. Acest studiu relativ minor avea drept obiect *fracţiile continue.* Lucrarea, cu aplicaţii în domeniul ecuaţiilor pătraţice, a apărut în revista *Annales de mathématiques pures et appliquées.* Ca o paranteză, Abel a murit la cinci zile după publicarea primului articol al lui

Galois. Pentru Galois, această primă incursiune în cercetarea matematică s-a transformat curând într-o explozie de noi idei. Tânărul de 17 ani era pe punctul de a revoluţiona algebra. Deşi Abel arătase fără ambiguitate că ecuaţia generală de gradul cinci nu poate fi rezolvată cu o formulă ce implică numai operaţii aritmetice şi extrageri de rădăcini, moartea sa prematură a lăsat neclarificată o întrebare mult mai importantă: Cum se determină dacă *orice* ecuaţie dată (de gradul cinci sau mai mare) este sau nu rezolvabilă cu o formulă? Reamintiţi-vă că multe ecuaţii particulare erau, totuşi, rezolvabile. În principiu, demonstraţia lui Abel lăsa deschisă posibilitatea să existe ecuaţii particulare ale căror soluţii să fie exprimabile cu ajutorul unei formule.

Pentru a răspunde la întrebarea rezolvabilităţii, Galois nu trebuia numai să introducă conceptul fundamental de grup, dar şi să formuleze o întreagă nouă ramură a algebrei, cunoscută astăzi drept *teoria lui Galois.* Drept punct de plecare, el şi-a ales teoria ecuaţiilor, pornind de acolo de unde o lăsase Lagrange. S-a concentrat asupra relaţiilor dintre prezumtivele soluţii ale unei ecuaţii (cum ar fi relaţia *x1 x4* = 1 a doua dintre cele patru soluţii x1, x2, x3, x4 ale ecuaţiei de grad patru: x4 + x3 + *xX* + *x* ++ 1 = 0) şi permutările acestor soluţii care lasă relaţiile neschimbate5 (vezi notele pentru un exemplu). Aici este însă punctul unde geniul său a luat cu adevărat problema pe cont propriu. Galois a izbutit să asocieze fiecărei ecuaţii un fel de „cod genetic" al acelei ecuaţii – *grupul Galois* al ecuaţiei – şi să demonstreze că proprietăţile grupului Galois sunt cele care spun dacă ecuaţia este rezolvabilă printr-o formulă sau nu. Simetria a devenit conceptul-cheie, iar grupul Galois era o măsură directă a proprietăţilor de simetrie ale ecuaţiei. Voi descrie în capitolul 6 esenţa strălucitei demonstraţii a lui Galois. Richard a fost atât de impresionat de ideile lui, încât a afirmat că tânărul geniu ar trebui admis fără examen la École Polytechnique. Pentru a-i da lui Galois o şansă de a-şi realiza ambiţiosul scop, el l-a încurajat să-şi expună

teoria în forma a doua memorii, pe care s-a oferit să le ducă personal marelui Cauchy, pentru a fi prezentate la Academia de Ştiinţe. Memoriile au fost, într-adevăr, înaintate pe 25 mai şi pe 1 iunie 1829, au fost prezentate pe scurt de Cauchy şi încredinţate pentru judecare lui Cauchy, Joseph Fourier (secretarul academiei) şi specialiştilor în fizică matematică Claude Navier şi Denis Poisson.

La mai mult de şase luni după înaintarea memoriilor, pe 18 ianuarie 1830, Cauchy trimitea academiei următoarea scrisoare de scuze6:

Trebuia să prezint astăzi la Academie mai întâi un raport asupra lucrării tânărului Galois, apoi un memoriu asupra determinării analitice a rădăcinilor primitive, în care să arăt cum se poate reduce aceasta la rezolvarea unor ecuaţii numerice având doar rădăcini întregi şi pozitive. O indispoziţie mă reţine în casă. Regret că nu pot participa la sesiunea de astăzi şi vă rog să mă reprogramaţi în şedinţa următoare pentru subiectele indicate.

Totuşi, la şedinţa următoare, care a avut loc pe 25 ianuarie, se pare că tendinţele egotiste ale lui Cauchy s-au impus din nou, căci el a sfârşit prin a prezenta numai propriul memoriu, fără a mai menţiona lucrarea lui Galois. Dar acesta nu era capătul ghinioanelor avute cu aceste manuscrise. În iunie 1829, Academia de Ştiinţe anunţa stabilirea unui nou Mare Premiu pentru Matematică. Obosit să tot aştepte verdictul lui Cauchy şi aflând din *Buletinul lui Ferrusac* de lucrarea lui Abel despre teoria ecuaţiilor, Galois s-a decis să retrimită lucrarea, cu ceva modificări, pentru acest concurs. (Nu găsesc nicio dovadă directă care să vină în sprijinul speculaţiei că cel care l-ar fi încurajat să-şi încerce norocul cu premiul era Cauchy, chiar dacă ceva dovezi indirecte, descrise mai târziu, par să indice că acesta fusese impresionat de lucrare.) Lucrarea trimisă la concurs de Galois („Asupra condiţiilor ca o ecuaţie să fie rezolvabilă prin radicali” – cele patru operaţii aritmetice şi extragerea de rădăcini) a fost de

atunci socotită drept una dintre cele mai inspirate capodopere din istoria matematicii. Ea a fost depusă în februarie 1830, puţin înainte de data limită, de 1 martie. Comitetul de premiere era format din matematicienii Legendre, Poisson, Lacroix şi Poinsot. Pentru motive care nu sunt în întregime clare, secretarul academiei, Fourier, a luat manuscrisul acasă. El a murit pe 16 mai, iar manuscrisul nu a fost niciodată recuperat dintre hârtiile sale. Drept urmare, fără ca Galois să fi ştiut absolut nimic, lucrarea prezentată de el n-a fost niciodată luată în considerare pentru decernarea premiului. În cele din urmă, premiul i-a fost acordat lui Abel (postum, şi îndreptăţit, având în vedere celelalte lucrări participante la concurs) şi lui Jacobi. Vă puteţi imagina furia lui Galois când a aflat în cele din urmă că manuscrisul său fusese pierdut. Paranoidul tânăr era acum convins că toate forţele mediocrităţii se uniseră pentru a-i refuza o binemeritată reputaţie.

Dezastrul loveşte de două ori

j

Dacă iunie 1827 fusese o lună relativ fericită pentru Galois, importantul său manuscris fiind supus atenţiei academiei, iulie a fost una dintre cele mai rele. Încoronarea lui Carol al X-lea în 1824 dusese la o creştere semnificativă a puterii bisericii şi a ultraregaliştilor. În Bourg-la-Reine, un nou preot şi-a reunit forţele cu alţi administratori de dreapta, într-o încercare de a-l îndepărta pe liberalul Nicolas-Gabriel Galois din poziţia de primar.

Acest tânăr preot a falsificat semnătura primarului, punând-o pe câteva cuplete stupide şi epigrame abjecte. Vădit incapabil să ţină piept urâtului scandal ce izbucnise, delicatul Nicolas-Gabriel s-a sinucis prin asfixiere cu gaz. Această tragedie s-a petrecut pe doi iulie, în apartamentul din Paris al lui Nicolas-Gabriel, de pe strada Saint Jean-de-Beauvais, la numai o aruncătură de băţ de şcoala lui Évariste. Răvăşi tul tânăr mai avea de îndurat şi o altă tortură emoţională – în timpul funeraliilor, a izbucnit o revoltă ca protest împotriva încercării răutăciosului preot

de a participa la slujbă. Figura 58 arată placa comemorativă pentru primarul Nicolas-Gabriel Galois, care se află şi în ziua de astăzi pe zidul primăriei.

Cu greu se poate imagina o perioadă mai nefavorabilă pentru ca Évariste să dea pentru a doua oară examenul de admitere la École Polytechnique. Mai mult, soarta a făcut ca examinarea să aibă loc la exact o lună7 după înmormântare, pe 3 august, într-o zi de luni, când Galois era încă în doliu. În istoria matematicii, această infamă examinare a devenit aproape echivalentă cu interogarea lui Galileo de către Inchiziţie. Comparaţi cu Galois, cei doi examinatori, Charles Louis Dinet şi Lefebure de Fourcy, nu erau, în cuvintele istoricului E.T. Bell, „nici măcar vrednici să-i ascută creioanele”. Deşi Dinet era el însuşi un fost student al Politehnicii şi dascălul care-l pregătise pentru propriul său examen de admitere pe nimeni altul decât pe marele Cauchy, de aceşti doi matematicieni nu ne mai amintim astăzi practic decât pentru un singur lucru – că l-au trântit la examen pe unul dintre cele mai mari genii matematice ale tuturor timpurilor. Numele lui Galois nu apare pe lista celor 21 de candidaţi pe care Dinet i-a considerat admisibili.

Nu ştim cu certitudine ce s-a întâmplat la acest examen. Se speculează că înclinaţia lui Galois de a calcula mintal şi de a scrie pe tablă numai rezultatele finale a făcut o impresie proastă la un examen oral, în care el ar fi trebuit să arate toate fazele gândirii sale. Dinet, în special, avea reputaţia că pune întrebări relativ simple, dar că este extrem de exigent în privinţa răspunsurilor. Răbdarea lui Galois, care nu a fost niciodată exemplară, trebuie să fi fost solicitată la limită de evenimentele din perioada morţii tatălui său. Potrivit cu una dintre versiuni, atunci când i s-a cerut să schiţeze teoria logariturilor aritmetici, Galois l-a informat pe Dinet – arogant, deşi corect (vezi notele) – că nu există logaritmi *aritmetici8.* Potrivit legendei, frustrat de incapacitatea examinatorilor de a înţelege neortodoxele sale metode, el a azvârlit cârpa de şters tabla într-unul dintre ei; această poveste se potriveşte cu caracterul său,

dar este probabil neadevărată – cel puţin, conform matematicianului Joseph Bertrand (1822 – 1900). Clar, eşecul la examen i-a lăsat lui Évariste o adâncă înverşunare şi n-a făcut decât să-i sporească simţul persecuţiei. Două decenii mai târziu, Olry Terquem, editorul revistei *New Annals of Mathematics,* va spune: „Un candidat cu inteligenţă superioară este pierdut dacă are un examinator cu inteligenţă inferioară". O notă biografică ce apărea în 1848 în *Magasin pittoresque* conchidea, de asemenea, că: „Pentru că nu poseda aşa-zisa «experienţă a tablei», pentru că nu exersase să rezolve cu voce tare, în faţa unei largi audienţe, acele chestiuni de detaliu… Galois a fost declarat respins". Fiindcă nu se admiteau decât maximum două încercări de intrare, Galois era acum silit să se înscrie la mai puţin prestigioasă École Préparatoire (ulterior numită École Normale). Mai exista, totuşi, încă un „mic" obstacol. Pentru a fi admis, Galois trebuia să-şi dea bacalaureatul în arte şi ştiinţe, pentru obţinerea diplomei de liceu, apoi să treacă un examen oral. Totala sa indiferenţă pentru orice nu era legat de matematică făcea să fie dificilă trecerea acestor examene, ca să nu spunem mai mult. Chiar şi examinatorul de la fizică, Jean Claude Peclet, scria cu uimire: „Nu ştie absolut nimic… Mi s-a spus că e bun la matematică. Asta mă surprinde mult". Cu toate acestea, în primul rând pe

} U» *fu.,» tu L – U.m **
yH*
01.
— " tătxA & çn.*
Jm/ mm*» ptm Atm. – ¿mm.*
*¿my-m */» Ahmmr f mmm Jyrm-m-i ¿mi rm* – y P M>4 Ím/6
X / «t «. «t«WW
*jtmmJ nmmtm. mmmfmr pm** /W/T */. **
un +.mt e J.» Jfmmm /*"*** y*V*>p
Jţ Jtm.» /I* **>* d m.*
2 tf.
¿íyr-m >W» Ajr» *4

Jm Sf 4 – *fm*
lu’. VW> «: – ar. *mtutmr 2 u* * y*
*¿-ţăe/... – mm» – Cimmjfluminătmm. J** <Wt*V*» «il ţ, Myyi & tmfm – Jtt.* <4 «m
(1 «5 x-o *mtyim o.*
*(72*m** «A-nwvtf *fmm Mmtt** (4/
— I» «fv «îi 4 *i-mEXI, /***
*fimmtrnir-m – 6-C ***”.*
¿! L *ÿ & t/t. ty/t. ultty. ts – jmămm* J’mwr* ar*’s*SU. – mt 2 t*
**4 *Híjmt. S». /” * * *». 4 – ze4 t – >-zÿ» 4 c şi e*/¿t ¿4* /w toHIMMOO 4. ¿
(4 i (4M/U-uv-< /, M. / /HWMF e
4-*m/imyr-i* 4 */cm”. fi/m + iâymt St/*W» t 4. i4 /t în 4 *J-m”. * m. Jumt IfUUU & Q. A*
9 QtYiâpp» r* 4 – AIC
4 pm: 4 «A
<wr «Vi-A – *
*m-mt-m. * ¿4M* AArA uii. fie i-i. În 4 w baza rezultatelor la matematică, Galois era admis, la începutul lui 1830, la secţiunea de ştiinţe. Figura 59 arată primele pagini a doua dintre lucrările de examen ale lui Galois – matematică (la concursul de cultură generală din 1828) şi fizică (la ultimul său concurs de cultură generală, din 1829).

Nu totul era întunecat în viaţa lui Galois. Anul 1830 a fost martorul apariţiei în importantul *Buletin al lui Ferrusac* a trei dintre articolele sale – două asupra ecuaţiilor şi unul asupra teoriei numerelor. Primul articol era precursorul revoluţionarei lui teorii a ecuaţiilor. Apariţia numelui său tipărit în imediata apropiere a numelor matematicienilor de frunte ai timpului trebuie să-i fi dat ceva satisfacţie lui Galois. În numărul din iunie în special, două articole semnate de Galois încadrau un articol de Cauchy. În acelaşi an, Galois l-a întâlnit pe Auguste Chevalier, care avea să devină cel mai bun prieten al său. Auguste şi fratele lui, Michel, l-au familiarizat cu noile idei socialiste, inspirate de filosofia religios-

egalitaristă cunoscută drept Saint-Simonism (după contele de Saint-Simon). Conceptele socio-economice ale acestei ideologii se bazau în primul rând pe completa eliminare a inegalităţilor sociale. Dată fiind firea pasională a lui Galois, implicarea sa crescândă în activităţi politice furtunoase nu putea să-i atragă decât necazuri.

Liberté, égalité, fraternité încă de la încoronarea sa, în 1824, Carol al X-lea stârnise o puternică opoziţie. Oponenţii Bourbonilor şi ai organelor lor legislative dominate de ultraregalişti făceau parte din două tabere – republicanii şi orléanistii. Primul partid, compus în principal din studenţi şi muncitori, îşi exprima opiniile inspirate de revoluţie în ziarul *La Tribune.* Cel de-al doilea dorea să-l înlocuiască pe Carol al X-lea cu Louis-Philippe, duce de Orléans, şi avea drept principal purtător de cuvânt *Le National*. În alegerile din iulie 1830, opoziţia a înregistrat o zdrobitoare victorie, de 274 de locuri faţă de 143 pentru parlament. Confruntat cu abdicarea, Carol al X-lea a încercat o lovitură de stat, dând pe 26 iulie o infamă serie de ordonanţe9. În prima ordonanţă, el declara: „Libertatea presei se suspendă… niciun ziar sau pamflet… nu poate apărea în Paris sau în departamente". Celelalte anulau rezultatele alegerilor şi stabileau datele de desfăşurare ale altora, noi. Aceste ordonanţe au fost însoţite de un avertisment dat de prefectul de poliţie, care desemna locurile publice în care era permisă citirea ziarelor interzise. Parizienii, înclinaţi cum îi ştim spre sfidare, nu erau pregătiţi să tolereze aşa ceva. Pe 27 iulie, un articol semnat de orléanistul Louis-Adolphe Thiers chema poporul la revoltă în termeni lipsiţi de echivoc. Mişcările de stradă au început în primele ore ale după-amiezii. Oamenii puteau fi văzuţi cărând piese de mobilier în orice colţ de stradă. În trei zile, au fost ridicate mai mult de cinci mii de baricade şi au izbucnit lupte grele, însoţite de dangătele tuturor clopotelor de biserică din Paris. Studenţii de la École Polytechnique făceau istorie în aceste *Trois Glorieuses (Trei Zile Glorioase),* căci se angajaseră în luptele din Cartierul Latin şi împrejurimile acestuia. Spiritul şi exploziva energie a celor *Trois*

Figura 60

Glorieuses au fost magnific surprinse în pictura *Libertatea conducând Popor*ul 10 (figura 60) a lui Eugène Delacroix (1798 – 1863). În mulţime, în spatele Libertăţii, se poate distinge bereta tipică a unui student la Politehnică.

Pe măsură ce se desfăşurau aceste fatidice evenimente, spre insuportabila lor frustrare, Galois şi colegii săi de la École Normale erau constrânşi să audă sunetele revoluţiei din spatele ferestrelor şi uşilor barate. Directorul şcolii, domnul Guigniault, a hotărât să utilizeze toate mijloacele, inclusiv o ameninţare că va chema trupele, pentru a-şi împiedica elevii să participe la revoltă. În seara zilei de 28, Galois n-a mai putut suporta. Cuprins de disperare, el a încercat de mai multe ori să escaladeze zidul exterior, fără să izbutească. Plin de vânătăi şi înfrânt, a fost nevoit să accepte faptul că lipsise de la revoluţie.

Când s-a risipit fumul, erau aproape patru mii de morţi. Ca un compromis între ultraregalişti şi republicani, ducele de Orléans a intrat în Paris pe 30 iulie şi a fost încoronat pe 9 august, luându-şi titulatura – presupus împăciuitoare – de

Louis-Philippe I, Rege al francezilor. Carol al X-lea a

plecat în exil, iar Cauchy, întotdeauna un fidel al Bourbonilor, a părăsit şi el Franţa, ca tutore al nepotului lui Carol. Guigniault, mereu oportunistul director de la École Normale, s-a grăbit să ofere serviciile elevilor săi noului guvern provizoriu. Dispreţul lui Galois pentru ipocritul director nu cunoştea margini, aşa că el era hotărât să utilizeze prima ocazie pentru a-i demasca perfida duplicitate.

În vara aceea, familia lui Galois a descoperit cu uimire la Bourg-la-Reine că altă dată fragilul şi rezervatul Évariste se transformase într-un pătimaş revoluţionar, care era gata să se sacrifice pentru idealurile republicane. Toamna, întors la scoală, el s-a alăturat aripii militante a partidului republican, cunoscută sub denumirea de Société des Amis du Peuple (Societatea Prietenilor Poporului). În aceeaşi perioadă, el s-a împrietenit cu alţi tineri republicani, care erau sortiţi să devină mari lideri politici: biologul François-Vincent Raspail (1794 – 1878), studentul la drept Louis Auguste Blanqui (1805 – 1881), care ulterior a petrecut mai mult de 36 de ani în închisoare, şi activul republican Napoleon Lebon (1807 după 1856). Societatea avea faima că nu şovăie să utilizeze mijloace agresive şi chiar violente pentru a-şi atinge scopurile. După arestarea liderului ei, Jean-Louis Hubert, ea s-a transformat într-o asociaţie secretă clandestină, avându-l ca preşedinte pe Raspail.

La École Normale, relaţia încordată dintre director şi Galois înainta rapid spre darea cărţilor pe faţă. Galois continua să ceară lucruri (cum ar fi o uniformă similară cu cea de la École Polytechnique; instrucţie militară pentru elevi) despre care trebuie să fi ştiut că Guigniault nu era nici măcar pregătit să le ia în considerare. În acelaşi timp, teoria declarată a lui Guigniault, că „elevii buni nu trebuie să fie interesaţi de politică”, era clar intolerabilă pentru Galois. În sfârşit, când pe 2 decembrie Guigniault a publicat o scrisoare atacând un dascăl liberal de la Louis-le-Grand, într-una dintre cele două gazete studenţeşti, replica a fost iute şi aprigă. *La Gazette des Écoles (Gazeta*

Şcolilor) a publicat următoarea scrisoare, a unui „student de la École Normale”:

Scrisoarea pe care Dl. Guigniault a înserat-o ieri în Lycée, cu prilejul unuia dintre articolele din ziarul dumneavoastră, mi s-a părut destul de indecentă. M-am gândit că sunteţi interesat de orice încercare făcută pentru a demasca acest om.

Iată care sunt faptele pentru care pot depune mărturie 46 de studenţi:

În dimineaţa de 28 iulie, fiindcă mulţi studenţi de la École Normale doreau să se alăture insurecţiei, Dl. Guigniault le-a spus, de două ori, că ar putea chema poliţia pentru a readuce ordinea. Poliţia pe 28 iulie!

În aceeaşi zi, Dl. Guigniault ne-a zis, cu obişnuita lui pedanterie: „Mulţi oameni de treabă au fost omorâţi de ambele părţi. Dacă aş fi soldat, n-aş şti ce decizie să iau. Ce s-ar cuveni să sacrific, libertatea sau legitimitatea?”

Acesta este omul, care şi-a prins o uriaşă rozetă tricoloră la pălărie a doua zi. Aceştia sunt doctrinarii noştri liberali!

Aş mai vrea să vă informez, domnule, că elevii de la École Normale, inspiraţi de nobile spirite patriotice, s-au prezentat de curând la Dl. Guigniault, pentru a-l informa de intenţia lor de a adresa o petiţie Ministerului Educaţiei, cerând arme şi dorind să ia parte la instrucţia militară, pentru a-şi putea apăra teritoriul dacă este nevoie.

Iată răspunsul Domnului Guigniault. Este la fel de liberal ca şi răspunsul său de pe 28 iulie:

„Cererea ce îmi este adresată ne-ar face să părem ridicoli; este o imitaţie a ceea ce s-a făcut în instituţii de nivel superior: ea a venit de jos. Aş dori să arăt că, atunci când aceeaşi cerere a ajuns la Ministru trimisă de aceste instituţii de educaţie superioară, numai doi membri ai Comitetului Regal au votat «Pentru», iar ei erau exact aceia din Comitet care nu sunt liberali. Ministrul a acceptat din cauză că se temea de tulburările studenţilor şi de spiritul lor pătimaş, care părea să ameninţe să ruineze complet Universitatea şi École Polytechnique”. Eu cred că,

dintr-un punct de vedere, Dl. Guigniault are dreptate să se apere în acest fel împotriva învinuirii de a avea prejudecăţi contra noii École Normale. Pentru el, nimic nu-i la fel de frumos ca vechea École Normale, care avea de toate.

Am cerut recent o uniformă, care ne-a fost refuzată; ei nu o purtau la vechea şcoală. La vechea şcoală, cursurile durau trei ani. Cu toate că, la înfiinţarea noii şcoli, s-a recunoscut că anul al treilea n-are rost, Dl. Guigniault nu renunţă la el.

Curând, potrivit regulilor de la vechea École Normale, vom fi învoiţi numai o dată pe lună şi va trebui să ne întoarcem la 5: 00 p.m. Este minunat să aparţii sistemului educaţional care a produs bărbaţi precum Cousin [referitor la Victor Cousin, filosof şi membru conservator al Comitetului pentru Educaţie] şi Guigniault!

Tot ceea ce face ilustrează o concepţie îngustă şi un conservatorism adânc înrădăcinat.

Domnule, sper că aceste detalii vă vor interesa şi că le veţi folosi la modul potrivit, în folosul stimatei dumneavoastră gazete.

Editorii ziarului adăugau că deliberat au scos semnătura din scrisoare.

Galois nici nu a confirmat, nici nu a negat că este autorul acestei scrisori, deşi multă lume îl bănuia de acest lucru. Pentru Guigniault, existau însă suficiente probe pentru a-l exmatricula pe Galois, pe care-l considera drept un constant factor de agitaţie. În scrisoarea sa de explicaţie adresată ministrului Educaţiei, Guigniault pretindea că avea o „mărturisire completă" de la Galois şi că, în general, până la acel moment, „îi tolerase comportamentul neconvenţional, lenea şi caracterul său foarte dificil".

Elevii de la École Normale nu l-au prea sprijinit pe Galois. Cei de la Arte au trimis chiar şi o scrisoare luând partea directorului, de teamă pentru viitoarele lor cariere şi, cel mai probabil, îndemnaţi de Guigniault. Cu toate acestea, dintr-o descriere publicată în *La Gazette,* aflăm că cel puţin un elev a demonstrat ceva curaj:

Tocmai am auzit că directorul de la École Normale i-a cerut fiecăruia [dintre elevii săi] să răspundă în particular la următoarea întrebare: „Eşti autorul scrisorii din *La Gazette des Écoles*?” Primii patru au răspuns că nu, iar al cincilea a spus: „Domnule, nu cred că pot să răspund la această întrebare, căci ar ajuta la trădarea unuia dintre colegii mei”. Dl. Guigniault a fost extrem de iritat de această demnă, nobilă replică.

Îndârjita polemică prilejuită de exmatricularea lui Galois a continuat vreme de trei săptămâni. Scrisorile de susţinere a lui Galois şi Guigniault alternau constant în paginile ziarelor. Galois îşi încheia ultimul apel adresat elevilor pe 30 decembrie, scriind: „Nu cer nimic pentru mine însumi, ci mă pronunţ pentru onoarea voastră şi conform conştiinţei voastre”.

Pe 2 ianuarie 1831, *La Gazette des Écoles* publica un articol al lui Galois, intitulat „Cu privire la predarea ştiinţelor, la profesori, la lucrări, la examinatori”. Era un manifest remarcabil, chemând la o completă reformă în predarea ştiinţelor. Multe dintre nemulţumirile lui Galois ar suna relevant şi în zilele noastre:

Până când vor fi obligaţi bieţii tineri să asculte sau să repete cât e ziua de lungă? Când li se va da ceva timp să reflecteze asupra acestei acumulări de cunoştinţe, să fie capabili să coordoneze [să găsească fire călăuzitoare în această nesfârşită multitudine de propoziţii, în aceste calcule fără legătură între ele?… Elevii sunt mai puţin interesaţi să înveţe decât să-şi treacă examenele.

Făcând, probabil, aluzie la propriile sale experienţe dureroase cu examinatorii, Galois se lamenta:

De ce nu pun examinatorii întrebări candidaţilor altfel decât într-o asemenea manieră, încâlcită? Se pare că ei se tem de a fi înţeleşi de aceia pe care-i interoghează; care este originea acestui deplorabil obicei, de a complica întrebările cu dificultăţi artificiale?

Din nefericire, în pofida obiecţiilor sale legitime cu privire la sistemul şcolar de pe timpul său, atunci când împrejurările îl vor forţa pe Galois să deschidă propria sa

„scoală”, nu va fi nici aceasta un mare succes.

O viaţă turbulentă

Dat afară din şcoală şi liber să dea curs viselor sale liberale, Galois s-a înrolat în artileria gărzii naţionale. Deşi această organizaţie se mândrea cu o uniformă proprie, era mai mult o miliţie. Galois va continua să poarte această uniformă chiar şi după ce artileria va fi desfiinţată, iar garda naţională, reorganizată, aşa încât să cuprindă numai populaţia plătitoare de impozite, din care el nu făcea parte. Trebuie să plăteşti, totuşi, un preţ atunci când nu eşti elev – Galois nu avea acum niciun mijloc de subzistenţă. Ca să-şi ducă zilele, s-a hotărât să dea lecţii de matematică, iar un prieten librar i-a îngăduit să utilizeze o cameră din librăria sa, de pe Rue de la Sorbonne numărul 5. Pentru acest scop, Galois a dat un anunţ în *La Gazette des Écoles,* în care făcea cunoscut că va ţine un curs de algebră pentru acei elevi „care simt cât de incomplet este studiul algebrei în colegii şi doresc să aprofundeze mai adânc în această ştiinţă”. Dar reţeta nu era bună pentru a face bani. Câteva zeci dintre prietenii lui republicani au venit la început din politeţe, dar n-au întârziat să se retragă de la acest curs extrem de avansat. Activităţile sale politice nu erau, de asemenea, de niciun folos, căci îi ocupau din ce în ce mai mult timp. Ambiţiile didactice ale lui Galois se reduceau, de aceea, la simple meditaţii, de nivel redus.

Pe frontul cercetării, un promiţător eveniment s-a petrecut la începutul lui 1831, numai pentru a se transforma ulterior într-o altă dezamăgire. Lui Galois i s-a cerut să-şi înainteze din nou memoriul la academie. Noua versiune a lucrării intitulate „Condiţii pentru rezolvabilitatea ecuaţiilor prin radicali” a fost prezentată pe 17 ianuarie, iar de data aceasta, însărcinaţi cu recenzarea ei erau matematicienii Denis Poisson (1781 – 1840) şi Sylvestre Lacroix (1765 – 1843). Au trecut mai mult de două luni, totuşi, fără niciun cuvânt de la academie. Frustrat, Galois şi-a dat pe faţă dezgustul, trimiţând o scrisoare preşedintelui pe 31 martie 1831, în

care se interesa de soarta lucrării, adăugând sarcastic: „Domnule, v-aş fi recunoscător dacă mi-aţi putea înlătura motivele de preocupare, invitându-i pe domnii Lacroix şi Poisson să anunţe dacă au pierdut şi ei memoriul meu [aşa cum a făcut Fourier] sau dacă intenţionează să facă un raport asupra acestuia la academie”. Nici această provocatoare scrisoare n-a avut drept efect primirea vreunui răspuns.

Între timp, evenimentele politice începeau să aibă un mare impact asupra vieţii lui Galois. Faimoasa matematiciană Sophie Germain11 (1776 – 1831), prima femeie care a făcut o breşă în bariera sexului, izbutind să intre în clubul băieţilor bătrâni, caracteriza atitudinea sa generală din acea vreme ca fiind dominată de „obiceiul de a insulta”. Ea adăuga un trist comentariu12: „Se zice că se va scrânti complet şi mă tem că este adevărat”. În aprilie, 19 artileristi din garda naţională, care refuzaseră să depună armele atunci când unitatea lor fusese desfiinţată, au fost aduşi la tribunal. Unul dintre ei era Pescheux d’Herbinville, la care vom reveni când vom vorbi de moartea lui Galois. Spre deliciul republicanilor, toţi au fost achitaţi pe 16 aprilie, într-un proces mult mediatizat, cunoscut drept „Procesul celor nouăsprezece”. Societatea Prietenilor Poporului a organizat un mare banchet la restaurantul „Aux Vendanges de Bourgogne”, pentru a sărbători evenimentul. Două sute de activişti republicani luau parte la el pe 9 mai, între care faimosul scriitor Alexandre Dumas (1802 – 1870), biologul şi politicianul Raspail, Galois şi mulţi alţii. Folosind cuvintele lui Dumas13, „ar fi greu de găsit în tot Parisul două sute de oaspeţi mai ostili guvernului decât aceştia”. Cum şampania n-a întârziat să curgă la sfârşitul mesei, s-au propus multe toasturi: pentru revoluţiile din 1789 şi 1793, pentru Robespierre, pentru mulţi alţii. Unul dintre toasturile cele mai articulate intelectual a fost propus de Dumas, care declara: „Beau pentru artă! Fie ca pana şi pensula să contribuie tot atât cât tunul şi sabia la primenirea socială căreia i-am dedicat vieţile noastre şi pentru care suntem

pregătiţi să murim”. În acel moment, Galois, care şedea în capul uneia dintre mese, a sărit în picioare, pentru a propune şi el un toast. Ţinând în aceeaşi mână un pahar cu vin şi un pumnal marinăresc deschis, el a fost auzit strigând: „Pentru Louis-Philippe!” Evenimentul a fost descris ulterior destul de amănunţit în memoriile lui Dumas:

Deodată, în toiul unei conversaţii particulare pe care o aveam cu persoana din stânga mea, numele Louis-Philippe, urmat de cinci sau şase fluierături, m-a făcut să ciulesc urechile. Una dintre cele mai însufleţite scene se desfăşura la cincisprezece sau douăzeci de scaune de mine.

Un tânăr, ţinând în aceeaşi mână un pahar ridicat şi un pumnal deschis, încerca să se facă auzit. Era Évariste Galois, ucis apoi în duel de Pescheux d’Herbinville, acel fermecător tânăr care făcea cartuşe din hârtie de mătase, pe care le înnădea cu panglici trandafirii.

Pe atunci, Évariste Galois avea abia 23 sau 24 de ani. Era unul dintre cei mai înflăcăraţi republicani. Era aşa de mult zgomot, că însăşi cauza lui era de neînţeles.

Tot ce am putut pricepe este că exista o ameninţare şi că se pronunţase numele lui Louis-Philippe; intenţia fusese făcută clară de cuţitul deschis.

Împrejurarea depăşea cu mult convingerile mele republicane. Am cedat presiunii vecinului meu din stânga care, fiind unul dintre comedianţii regelui, nu avea chef să fie compromis şi am sărit de pe pervazul ferestrei, în grădină.

M-am dus acasă cam îngrijorat. Era clar că acest episod nu va rămâne fără consecinţe. Într-adevăr, două sau trei zile mai târziu, Évariste Galois a fost arestat.

Există câteva inexactităţi supărătoare în descrierea lui Dumas (de ex., privind vârsta lui Galois), iar la problema identităţii celui care l-a omorât pe Galois voi reveni mai târziu, dar faptele de bază sunt, neîndoielnic, corecte. *La Gazette des Écoles,* care-l sprijinise pe Galois în altercaţia cu Guigniault, a publicat propria ei variantă a

evenimentului, în numărul din 12 mai: „Au fost propuse multe toasturi; pare-se că un instigator, zis a fi un student, s-a ridicat de la masă, a scos din buzunar un stilet şi, agitându-l prin aer, a început să strige: «Iată cum îi voi jura credinţă lui Louis-Philippe»”. Agitând pumnalul, Galois a fost perceput ca făcând o ameninţare la viaţa regelui. A fost arestat a doua zi în casa mamei sale, ţinut în detenţie preventivă la închisoarea Sainte-Pélagie şi adus la judecată pe 15 iunie 1831.

Procedurile legale s-au deschis14 cu o serie de întrebări de rutină puse de judecătorul care prezida instanţa, ce urmăreau, în esenţă, ca Galois să descrie evenimentele de la banchet. Atunci s-a petrecut ceva neaşteptat. Prizonierul a fost întrebat: „Aţi scos un cuţit… şi aţi rostit «Pentru Louis-Philippe»?” Spre uimirea generală, Galois a răspuns: „Aveam un cuţit pe care-l utilizam ca să tai carnea din bucate. L-am fluturat, zicând, «Pentru Louis-Philippe, *dacă ne trădează*». Ultimele cuvinte n-au fost auzite decât de cei din imediata mea vecinătate, din cauza tuturor fluierăturilor scoase de… cei care înţeleseseră cuvintele mele ca fiind un toast în sănătatea lui Louis-Philippe”. Luat prin surprindere, judecătorul a întrebat dacă Galois se temea cu adevărat că exista un pericol ca regele să-şi abandoneze datoriile şi să-şi trădeze naţiunea. Evariste a răspuns: „Toate acţiunile regelui, deşi nu arată încă rea-credinţă, ne permit să ne îndoim că este de bună-credinţă”. Discuţia dintre judecător şi Galois a continuat o vreme. Au fost chemaţi martori, atât pentru acuzare, cât şi pentru apărare. Chestiunea caracterului privat sau public al întâlnirii a devenit problema centrală. În cel din urmă caz, ambiguul toast al lui Galois putea fi luat drept o provocare, cu intenţia de a incita la violenţă împotriva regelui. Remarcile concluzive ale lui Galois au fost tăiate scurt de judecătorul prezident, care, înţelept, a priceput că tânărul cu sânge fierbinte şi-ar fi putut pune singur ştreangul de gât prin afirmaţii imprudente şi inflamatoare. După deliberări care n-au durat decât o jumătate de oră, Galois a fost achitat.

Potrivit legendei, imediat după citirea verdictului, Galois şi-a luat calm pumnalul de pe masa de probe materiale a tribunalului şi a părăsit în tăcere curtea de justiţie. Dat fiind că înregistrarea grefierului spune că în timpul procesului Galois a pretins că îşi pierduse pumnalul când a plecat din restaurant, această legendă nu poate fi confirmată. Într-un fel sau în altul, temperamentalul tânăr de 19 ani era din nou liber pe străzi.

Pe 15 iunie, în aceeaşi zi în care a început procesul lui Galois, ziarul *Le Globe* a decis să facă publică povestea frustrantei lui experienţe cu academia. Un articol scris cel mai probabil de unul dintre fraţii Chevalier, prieteni cu Galois, începea descriind geniul acestuia şi spunând că el descoperise independent proprietăţile funcţiilor eliptice (care-l făcuseră celebru pe Abel). Textul relata apoi incredibilele tribulaţii prin care trecuse Galois din cauza vârfurilor lumii matematicii. În special, articolul istorisea ghinioanele avute de el cu memoriul asupra rezolvabilităţii ecuaţiilor.

Anul trecut, înainte de 1 martie, Dl. Galois a trimis un memoriu la secretariatul Institutului Franţei, asupra rezolvabilităţii ecuaţiilor algebrice. Acest memoriu era lucrarea cu care el se înscria la concursul pentru Marele Premiu de Matematică. Memoriul depăşea anumite dificultăţi, pe care Lagrange însuşi nu le-a rezolvat. Dl. Cauchy îl elogiase pe autor pe acest subiect. Dar ce s-a întâmplat? Memoriul s-a pierdut, iar premiul a fost acordat [lui Abel şi lui Jacobi], fără ca tânărul savant să poată participa la concurs. Într-o replică la o scrisoare trimisă Academiei de tânărul Galois, plângându-se de tratamentul neglijent de care a avut parte lucrarea sa, tot ceea ce a putut scrie Dl. Cuvier era: „Chestiunea e foarte simplă. Memoriul s-a pierdut la moartea Domnului Fourier, căruia îi fusese încredinţată sarcina de a-l examina”. Or, memoriul a fost rescris şi prezentat din nou Institutului. Dl. Poisson, care trebuie să-l evalueze, nu şi-a făcut încă această datorie, rezultatul fiind că vreme de mai mult de cinci luni nefericitul său autor a tot aşteptat un cuvânt

amabil de la Academie.

Interesant, presupunând că Galois însuşi le furnizase fraţilor Chevalier conţinutul articolului, aflăm că domnul Cauchy îşi exprimase aprecierea la adresa lucrării sale, chiar dacă nu reuşise să transmită acelaşi entuziasm academiei. Poate că drept răspuns la această critică publică a neglijenţei academiei, Poisson şi Lacroix au dat, în sfârşit, verdictul cu privire la lucrarea lui Galois. Raportul lor este datat 4 iulie 1831 şi a fost prezentat în şedinţa din ziua de 11 iulie. Era o bombă – ei nu aprobau teoria lui Galois. Într-un raport nu prea zelos15, care demonstrează clar că Poisson şi Lacroix fie n-au reuşit să înţeleagă, fie, în cel mai bun caz, aveau prejudecăţi împotriva inovativelor idei de teoria grupurilor ale lui Galois, raportorii scriu evaziv:

Am făcut toate eforturile posibile pentru a înţelege demonstraţia Domnului Galois [a condiţiilor în care o ecuaţie este rezolvabilă printr-o formulă]. Raţionamentele sale nu sunt nici suficient de clare, nici suficient dezvoltate pentru a ne permite să judecăm exactitatea lor, aşa încât nu suntem într-o poziţie care să ne îngăduie să formulăm vreo opinie. Autorul afirmă că teorema care face subiectul particular al memoriului său este parte a unei teorii generale, ce ar putea conduce la multe alte aplicaţii. Se întâmplă frecvent ca diferite părţi ale unei teorii să se clarifice una pe alta şi sunt mai uşor de priceput luate împreună, decât separat. Trebuie, de aceea, să aşteptăm ca autorul să-şi publice lucrarea în integralitatea ei pentru a ne forma o opinie definitivă; în starea în care este în prezent partea supusă atenţiei Academiei, nu vă putem recomanda să vă daţi aprobarea.

Academia a adoptat concluziile acestui raport negativ. Chiar dacă acceptăm faptul că nu claritatea fusese vreodată punctul forte al lui Galois şi că explicaţiile date lăsau puţin de dorit, nu putem evita concluzia că una dintre cele mai imaginative realizări din istoria algebrei îşi avea încă de aşteptat acceptarea din partea unei audienţe conservatoare. În esenţă, ideile lui Galois au căzut victime

faptului că nu erau cele la care se aşteptau Poisson şi Lacroix. Referenţii credeau că vor găsi în manuscris un criteriu simplu, bazat pe nişte coeficienţi care să le spună imediat dacă orice ecuaţie particulară este rezolvabilă printr-o formulă sau nu. În loc de aceasta, ei se treziseră în faţa unui întreg nou concept – teoria grupurilor – şi a unor condiţii bazate pe soluţiile ecuaţiei, considerate drept existente. Acest lucru era prea inovativ pentru a fi acceptat în 1831.

La închisoare

Sentinţa academiei era o lovitură năprasnică pentru Galois. Cu toate acestea, convins de corectitudinea ideilor sale, Galois a adăugat, sub una dintre adnotaţiile critice făcute de Poisson pe manuscris, următoarele cuvinte: „Să judece cititorul” (în figura 61 este prezentată pagina respectivă). Înrăit pe plan ştiinţific şi predispus spre violenţă în cel politic, Galois vedea cum şi relaţia cu propria mamă devenea neplăcut de încordată. De aceea, a părăsit casa părintească şi a închiriat o cameră pe Rue des Bernardins, la numărul 16 (figura 62).

Figura 61

Necazurile nu vin niciodată singure, ci cu ghiotura. Se apropia Ziua Bastiliei (14 iulie), iar republicanii făceau planuri pentru o mare demonstraţie. Mai exact, ei doreau să organizeze o ceremonie provocatoare pentru comemorarea plantării, cam cu patruzeci de ani mai înainte, a unui simbolic arbore al libertăţii în Place de la Bastille. Poliţia a luat măsuri preventive, arestând mulţi activişti cunoscuţi în noaptea de 13 spre 14 iulie. Galois a reuşit să scape de închisoare fie fiindcă nu era pe „lista neagră" a poliţiei, fie fiindcă nu a dormit acasă. Pe la amiaza lui 14 iulie, totuşi, un grup de circa şase sute de oameni condus de Galois şi de prietenul său Ernest Duchatelet16, un student de la École des Chartes, a început să traverseze Pont Neuf. Evariste purta uniforma gărzii naţionale (ilegală pe atunci) şi era înarmat până-n dinţi (având câteva pistoale, o puşcă încărcată şi un pumnal). Fiind pregătită pentru posibile adunări

subversive, poliţia a intervenit cu repeziciune. Galois şi Duchatelet au fost arestaţi pe pod, la fel cum s-a întâmplat şi cu alţi lideri republicani, în alte locuri. Pentru a înrăutăţi şi mai mult lucrurile, Duchatelet a desenat pe zidul celulei o pară, simbolizând capul regelui. (Figura 63 arată o caricatură atribuită pictorului Honoré Daumier, în care Louis-Philippe se metamorfozează într-o pară.) Capul era desenat lângă o ghilotină şi însoţit de o proclamaţie populară printre republicani la acea dată: „Philippe îşi va purta capul la altarul tău, o Libertate”. Procesul lui Galois şi Duchatelet a început pe 23 octombrie 1831. Fiindcă acuzaţia de purtare a unei uniforme ilegale putea fi contestată cu greu, era destul de clar că Galois va fi condamnat (posesiunea de arme era destul de uzuală pe atunci). Ceea ce a şocat întrucâtva era sentinţa nerezonabil de aspră, de şase luni de închisoare.

Duchatelet, care se bucura, probabil, de o mai mică reputaţie de tulburător al ordinii publice, n-a fost condamnat decât la trei luni de închisoare.

(N-am găsit nicio probă care să sprijine speculaţia că sentinţa lui Duchatelet fusese redusă în schimbul acordului său de a colabora cu poliţia.)

Galois a făcut recurs, dar Figura 63

sentinţa sa a fost confirmată pe 3 decembrie. Cei doi au fost trimişi la închisoarea Sainte-Pélagie (figura 64), din cel de al cincilea arondisment al Parisului, nu departe de Jardin des Plantes (grădina botanică). Dintre ceilalţi republicani arestaţi, biologul Raspail, el însuşi un proeminent lider al Prietenilor Poporului, a fost deosebit de provocator în timpul propriului său proces, din 1832. El a mers până la a declara că regele, care-şi trădase poporul, „ar trebui îngropat de viu sub ruinele Tuileriilor”. Nici nu mai este nevoie să spunem că această declaraţie nu i-a atras multă simpatie din partea judecătorilor, care l-au condamnat la 15 luni de închisoare la Sainte-Pélagie.

Sainte-Pélagie era tipul de închisoare la care te-ai aştepta pentru Parisul acelei perioade. Un zid mare înconjura întregul complex, iar clădirile cu temniţe

închideau trei curţi interioare. Deţinuţii erau grupaţi după categoria infracţiunilor săvârşite, cei politici ocupând una dintre secţiunile laterale. Galois, care aparţinea celei mai de jos clase în termeni de mijloace financiare, a stat, cel mai probabil, într-unul dintre dormitoarele cu 60 de paturi. Cei care-şi permiteau îşi puteau chiar plăti accesul în celule private, mâncarea fiindu-le adusă de la restaurante locale. Mai toate informaţiile despre condiţiile mizerabile îndurate de Galois provin din scrieri ale celor trei persoane cărora le păsa de soarta lui: colegul său de puşcărie Raspail, ale cărui *Scrisori despre închisorile Parisului*[17] aveau să fie publicate opt ani mai târziu, poetul Gérard de Nerval (1808 – 1855), care a fost arestat în februarie 1832 şi a scris chiar şi un poem despre închisoare, şi iubitoarea soră a lui Galois, Nathalie-Théodore, care-şi vizita fratele de câte ori putea şi a făcut orice-i stătea în puteri pentru a-i hrăni atât corpul, cât şi sufletul. Două incidente dramatice descrise în amintirile lui Raspail sunt îndeosebi vrednice de atenţie. Pe 29 iulie, în vreme ce deţinuţii erau în cea de-a treia zi în care comemorau cele „Trei zile glorioase”, un glonţ tras din Rue du Puits de l’Ermite, din faţa închisorii, l-a rănit pe unul dintre colegii de celulă ai lui Galois. În timpul întâlnirii ce a avut loc ulterior între o delegaţie de deţinuţi şi guvernatorul închisorii, Galois, care era membru al delegaţiei, a spus, se pare, că unul dintre gardienii închisorii ar fi tras şi l-a şi insultat pe guvernator. Drept consecinţă, a fost aruncat în carceră, ceea ce a provocat o reacţie violentă din partea deţinuţilor. Raspail îl citează pe unul dintre ei, care i-a vorbit astfel guvernatorului închisorii: „Acest tânăr Galois nu a ridicat tonul vocii, după cum bine ştiţi; el rămâne la fel de rece ca şi matematica lui atunci când vorbeşte”. Ceilalţi deţinuţi au dat glas asentimentului lor: „Galois în carceră! Oh, bastarzii! Au o ranchiună împotriva micului nostru savant”. După această exclamaţie de sprijin, deţinuţii au luat controlul asupra închisorii, ordinea fiind restabilită abia a doua zi. De teama altor agitaţii, Galois a fost scos din carceră.

Raspail mai dă şi o destul de vagă, dar tulburătoare descriere a unei tentative de sinucidere comise de Galois. Se pare că tânărul Evariste, care nu fusese obişnuit să bea mult, era adeseori forţat de colegii săi de detenţie să se îmbete. „Eşti un băutor de apă, tinere”, îşi bătea ei joc de el, „O, Zanetto [porecla dată lui Galois de către deţinuţi], lasă partidul republicanilor şi întoarce-te la matematica ta!” Cu una dintre aceste ocazii, adică beat fiind, tânărul i-a dezvăluit lui Raspail agonia prin care trecea de la moartea tatălui său: „Mi-am pierdut tatăl şi nimeni nu l-a înlocuit vreodată”. El a adăugat apoi o frază ce se va dovedi a fi înfiorător de profetică: „Voi muri într-un duel provocat de o cochetă de joasă clasă”. Cum Raspail şi alţi câţiva deţinuţi încercau să-l întindă pe un pat, orb de beat ce era, Galois de striga: „Mă dispreţuieşti, tu, care eşti prietenul meu! Ai dreptate, dar eu, cel care am comis această crimă, trebuie să mă sinucid!” Numai intervenţia rapidă a deţinuţilor l-a împiedicat pe Galois să-şi ducă până la capăt această intenţie fatală.

Descrierea făcută de Nerval18 ultimelor sale minute petrecute în închisoare este la fel de mişcătoare: „Era ora cinci. Unul dintre tovarăşii mei de închisoare m-a condus la poartă şi m-a sărutat, făgăduindu-mi că va veni să mă vadă de îndată ce iese din închisoare. El mai avea de ispăşit două sau trei luni. Era nefericitul Galois, pe care nu l-am mai văzut, căci a fost ucis într-un duel, în dimineaţa în care şi-a redobândit libertatea”. Totuşi, cea care zugrăveşte cel mai sfâşietor tablou al stării fizice şi mintale a lui Galois este sora sa, Nathalie-Théodore. După o dureroasă vizită, chinuită, ea scrie în jurnalul ei: „Să îndure încă cinci luni fără o gură de aer proaspăt! E o foarte rea perspectivă şi mă tem că sănătatea lui va avea mult de suferit. Este deja extrem de obosit. Nu-şi îngăduie să fie distras de niciun gând, a căpătat un caracter sumbru, care-l face să pară mai bătrân decât este. Privirile îi sunt goale, de parcă ar avea cincizeci de ani”.

Atunci când nu era beat, Galois îşi petrecea de regulă zilele plimbându-se neîncetat în jurul curţii, de obicei

adâncit în gânduri. Serile erau dedicate unor gălăgioase adunări republicane şi unor ceremonii patriotice în jurul steagului tricolor. Cu toate acestea, Galois a găsit timp să scrie o lungă prefaţă (figura 65 arată prima pagină) pentru excepţionalele sale memorii matematice. Aceasta era, în realitate, un aspru rechizitoriu al lumii ştiinţifice şi al practicilor sale. Ea începe printr-o persiflare 19 a ierarhiei oamenilor de ştiinţă şi a paralizantelor constrângeri impuse de nevoia de sprijin.

În primul rând, veţi observa că pagina a doua a lucrării nu e plină de nume, prenume, titluri, onoruri şi elogii aduse vreunui prinţ cărpănos, a cărui pungă se deschide la mirosul de tămâie, ameninţând să se închidă atunci când tămâierniţa rămâne goală. Nici nu veţi întâlni, cu litere de trei ori mai mari decât capul vostru, un omagiu respectuos adus vreunei personalităţi de rang înalt din ştiinţă sau vreunui înţelept patron, un lucru socotit a fi indispensabil (era să zic inevitabil) pentru oricine doreşte să scrie la douăzeci de ani.

Dacă am înlocui cuvântul „prinţ” cu „agent de finanţare”, spusele lui Galois ar rămâne valabile şi astăzi, aşa cum erau acum 170 de ani. După cum îmi spunea cândva un proeminent om de ştiinţă: „Între scrierea cererilor de finanţare prin care descriu ce *intenţionez* să fac şi scrierea rapoartelor despre ce *am făcut,* nu mai rămâne timp ca să şi *fac* efectiv ceva!”

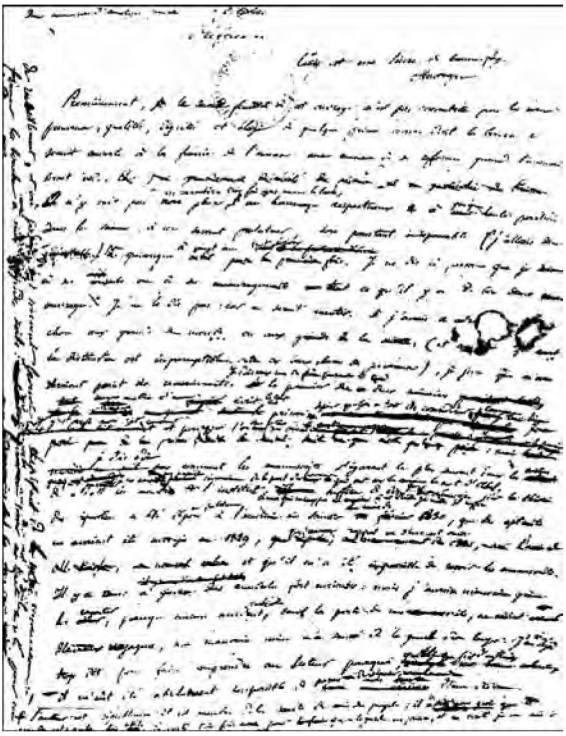


Figura 65

Prefaţa lui Galois se încheie pe un ton plin de speranţă, deşi ironic: „Atunci când competiţia – adică, egoismul – nu va mai guverna în ştiinţă, atunci când oamenii se vor întovărăşi pentru studiu şi nu pentru a trimite pachete sigilate la academii, ei vor fi dornici să-şi publice chiar şi rezultatele nesemnificative, câtă vreme sunt noi, adăugând, «nu ştiu restul»”.

Un romantic îndrăgostit

În primăvara lui 1832, Europa a fost măturată de o devastatoare epidemie de holeră. Parisul a fost deosebit de grav lovit. Apa contaminată a râului Sena îşi cerea jertfa zilnică, de aproximativ o sută de morţi. În parte poate că datorită sănătăţii sale fragile, dar mai probabil fiindcă era o practică obişnuită cu deţinuţii politici, Galois a fost transferat, pe 13 martie20, de la Sainte-Pélagie la un cămin de convalescenţi21 din Rue de Lourcine numărul 84

– 86 (mai târziu, Rue Broca numărul 94), unde a fost plasat pe cuvânt de onoare. În acest cămin, cunoscut pe atunci drept „Casa de sănătate” a lui Sieur Faultrier, s-a întâmplat ceva dramatic: Galois s-a îndrăgostit. Până atunci, poate că din cauza personalităţii dominatoare a mamei sale, Galois nu avusese relaţii cu femeile. De fapt, la una dintre bacanalele din închisoare, el i-a destăinuit lui Raspail: „Nu-mi plac femeile şi mi se pare că n-aş putea iubi decât o Tarpeia sau o Graccha” (două legendare femei romane; Tarpeia şi-a trădat cetatea, dând-o pe mâna sabinilor, iar Graccha este Cornelia Gracchus, mama şi educatoarea lui Tiberius şi Gaius). Obiectul afecţiunii sale înflăcărate era tânăra Stéphanie Potterin du Motel, care trăia în aceeaşi clădire a căminului de convalescenţă. Tatăl ei, Jean-Paul Louis Auguste Potterin du Motel, era un fost ofiţer din armata lui Napoleon, iar fratele ei, care avea 16 ani pe atunci, avea să devină medic. Familia Potterin du Motel întreţinea o strânsă legătură de prietenie cu proprietarul casei de convalescenţă.

Puţine povesti de dragoste din istorie22 au avut consecinţe mai tragice. Se prea poate ca iniţial Stéphanie să-i fi arătat un oarecare interes pasionatului şi inteligentului tânăr, dar nu i-a trebuit mult ca să-i respingă cu răceală avansurile. Pe dosul uneia dintre hârtiile sale deja utilizate, Galois a copiat două din scrisorile Stéphaniei. Din nefericire, aceste scrisori conţin întreruperi, în care lipsesc cuvinte şi silabe. Cel mai probabil este că Galois rupsese originalele, cuprins de furie. Ulterior, el a încercat cu disperare să reconstituie cuvintele iubitei sale din fragmente, oricât de dureroase trebuie să fi fost aceste cuvinte.

Soarta unuia dintre cele mai mari genii care au trăit vreodată era pe cale de a fi pecetluită de remarcile zdrobitoare de inimi ale unei „infame cochete” care avea mai puţin de 17 ani pe atunci. Prima scrisoare, datată 14 mai 1832, sună astfel:

Să punem capăt acestui lucru, asta e ceea ce te rog. Nu am suficientă minte să continui o corespondenţă de

acest tip, dar voi încerca să am suficientă [minte] pentru a conversa cu tine, aşa cum obişnuiam înainte de a se fi întâmplat ceva. Asta e, Monsieur… există… care trebuie… tu… la mine şi nu te mai gândi la lucruri care nu pot exista şi care nu vor fi existat niciodată.

Scrisoarea lasă puţină îndoială asupra faptului că Galois, lipsit de experienţă şi, poate, cu sângele prea fierbinte, a făcut sau a spus ceva ce a ofensat-o pe Stéphanie sau a speriat-o, îndepărtând-o. Tonul rece sugerează că tânăra nu fusese prea entuziastă nici la început. Cea de a doua epistolă, cel mai probabil scrisă câteva zile mai târziu, era încă şi mai devastatoare. Pe Stéphanie nu o mai interesa nici măcar o simplă prietenie.

Am urmat sfatul tău şi m-am gândit… ce s-a întâmplat… s-a petrecut între noi, oricum ai vrea să-i spui. Mai mult, Domnule, fii sigur că sunt slabe şanse să mai fi fost şi altceva; faci presupuneri greşite şi regretele tale sunt neîntemeiate. Prietenie adevărată abia dacă există altfel decât între persoane de acelaşi sex, în special. prieteni. tânguire în vid care. absenţa oricărui sentiment de acest fel. Încrederea mea. dar au fost rău lovite. m-ai văzut tristă, m-ai întrebat asupra motivului, am răspuns că sentimentele mele fuseseră lovite. M-am gândit că o vei lua ca orice persoană în faţa căreia se rosteşte un cuvânt din acele. nu este.

Calmul gândurilor mele îmi lasă libertatea de a judeca oamenii pe care-i văd de obicei nefăcându-şi prea multe mustrări; acesta este motivul pentru care rareori regret că am greşit în privinţa lor sau că am fost influenţată în părerea mea despre ei. Nu sunt de acord cu tine cu privire la senti [mentele]. mai mult decât a. cer nici. [Îţi] mulţumesc sincer pentru toate acele [sentimente] prin care voiai să te apropii de mine.

Galois era devastat. Efectele puternice ale acestei povesti asupra dispoziţiei şi atitudinii sale emoţionale cu privire la viaţă în genere pot fi apreciate din scrisoarea pe care a expediat-o pe 25 mai bunului său prieten Auguste Chevalier. La acea vreme, Auguste, fratele acestuia,

Michel, şi trei duzini de alţi Saint-Simonieni înfiinţaseră o comunitate mică în Menilmontant, în estul Parisului. Galois scrie melancolic:

Dragul meu prieten.

Este o plăcere să fii trist, dacă poţi spera la consolare. Eşti fericit să suferi dacă ai prieteni. Scrisoarea ta plină de har apostolic mi-a dat ceva calm. Dar cum pot eu îndepărta orice urmă a unor emoţii violente, precum cele pe care le-am trăit? Cum mă pot consola, când am secătuit într-o lună cea mai mare sursă de fericire pe care o poate avea un bărbat? Când am secătuit-o fără fericire, fără speranţă, când sunt sigur că am epuizat-o pentru toată viaţa?

El a continuat cu o descriere de Casandră a agonicelor sale chinuri interioare: „Vreau să mă îndoiesc de cruda ta profeţie, că nu voi mai face niciodată cercetare. Dar trebuie să admit că există ceva adevăr în asta; pentru a fi un savant, trebuie să fii numai savant. Inima mea se revoltă împotriva capului. Nu adaug, ca tine, «păcat»”. Şi a încheiat cu o licărire de speranţă: „Te voi vedea pe 1 iunie. Sper să ne întâlnim deseori în prima jumătate a lui iunie. Voi pleca în jur de 15 la Dauphine”. Dar luminiţa de la capătul tunelului, implicată de ultimele lui vorbe, este repede stinsă de fraza din post-scriptum: „Cum mă poate păngări o lume pe care o detest?”

Galois nu avea să-l mai revadă niciodată pe Auguste. Ajungem acum la partea cea mai interesantă a povestit lui Galois – la misterioasa sa moarte. Daţi-mi voie să remarc încă de la început că, din punct de vedere pur matematic, pentru istoria teoriei grupurilor şi aplicaţia sa la simetrii, nu contează de ce a murit Galois sau cine l-a ucis. Totuşi, orice relatare a vieţii acestui remarcabil geniu ar fi lacunară fără discutarea acestor chestiuni. În particular, există izbitoare similitudini între vieţile celor două principale personaje din saga ecuaţiei ce nu putea fi rezolvată – Abel şi Galois. Amândoi au fost educaţi iniţial de un părinte şi inspiraţi apoi de un dascăl talentat. Amândoi şi-au pierdut tatăl la o vârstă fragedă şi au

încercat să rezolve aceleaşi probleme de notorie dificultate. Dar asta nu-i totul. Amândoi au fost victime ale aceleiaşi conservatoare ierarhii matematice (Cauchy, în particular), nefericiţi (pentru diferite motive) în vieţile lor şi amândoi au murit tragic în floarea tinereţii. Totuşi, cunoaştem aproape fiecare detaliu al circumstanţelor morţii lui Abel, în vreme ce moartea lui Galois este învăluită în mister, controversă şi speculaţie. Această – cum să-i spun? – lipsă de simetrie m-a necăjit cu adevărat. Drept consecinţă, am luat hotărârea să investesc tot timpul şi efortul care îmi vor fi necesare pentru a investiga orice aspect al vieţii lui Galois şi, în special, moartea sa. Am făcut tot ce se putea pentru a nu lăsa nicio piatră nerăsturnată, am citit orice document pe care am putut pune mâna şi am vizitat majoritatea locurilor relevante. Nu pot decât să sper că rezultatele justifică efortul.

O moarte misterioasă

Faptele cunoscute privitoare la activităţile desfăşurate de Galois23 între 25 mai şi acea dimineaţă fatidică de 30 mai, când şi-a înfruntat adversarul într-un duel cu pistoale, sunt foarte puţine. Pe 29 mai, în ajunul duelului, el a scris trei epistole. Prin una dintre ele, prezenta scuze „tuturor republicanilor”:

Îi rog pe prietenii mei patrioţi să nu-mi reproşeze că mor altfel decât pentru ţara mea.

Mor ca victimă a unei infame cochete şi a doi naivi, păcăliţi de ea. Viaţa mea se stinge într-o mizerabilă clevetire. Oh! De ce să mori pentru ceva atât de mic, pentru ceva atât de vrednic de dispreţ!

Cerul mi-e martor că numai constrâns şi forţat am acceptat o provocare pe care am încercat s-o evit prin orice mijloc. Mă căiesc că am spus un adevăr neplăcut unor oameni care erau atât de puţin capabili să-l asculte calmi. Dar am spus adevărul.

Iau cu mine în mormânt o conştiinţă netulburată de minciuni, nepătată cu sânge de patriot.

Adio! Ceea ce m-a ţinut în viaţă era binele public. Iertaţi-i pe cei ce mă ucid, căci ei sunt de bună-credinţă.

Ultimele cuvinte, amintind de cele rostite de Cristos pe cruce24 („iartă-i, Doamne, căci nu ştiu ce fac”), reflectă urme ale educaţiei religioase pe care o primise de la mama sa. Altminteri, dacă le luăm ca atare împreună cu scrisorile de la Stéphanie, tabloul ce este schiţat de această epistolă pare destul de limpede. Prin vorbe sau fapte, Galois a ofensat-o pe tânăra femeie, iar cei doi „păcăliţi” de ea l-au provocat la duel. Galois nu le poartă pică celor doi bărbaţi, care „sunt de bună-credinţă”, şi nu regretă decât că a fost în întregime sincer. Se simte un element de concesie şi de supunere în faţa autorităţii în cuvintele lui Galois: „numai constrâns şi forţat am acceptat o provocare”. Voi reveni mai târziu la acest important punct.

După aceea, Galois le-a scris unor prieteni republicani, N.L. (aproape sigur Napoléon Lebon) şi V.D. (aproape sigur Vincent Delaunay):

Bunii mei prieteni.

Am fost provocat [la duel] de doi patrioţi… Mi-e cu neputinţă să refuz.

Îmi cer iertare de a nu fi informat pe niciunul dintre voi. Dar adversarii mei mi-au cerut cuvântul de onoare că nu voi informa niciun alt patriot.

Sarcina voastră este simplă: să dovediţi că am luptat împotriva voinţei mele, adică după ce am epuizat toate mijloacele posibile de compromis, şi să spuneţi că nu sunt capabil să mint, nici chiar pe un subiect atât de neînsemnat ca cel în chestiune.

Amintiţi-vă de mine, căci soarta nu mi-a hărăzit o viaţă îndeajuns de lungă pentru ca ţara mea să-şi amintească de mine.

Mor ca prieten al vostru.

Această deprimantă scrisoare, luată din nou ad litteram, adaugă o importantă informaţie: adversarii erau „patrioţi”, ceea ce înseamnă republicani activi. Impresia că Galois cedează autorităţii este şi mai mult accentuată: „Mi-e cu neputinţă să refuz… adversarii mei mi-au cerut cuvântul de onoare că nu voi informa niciun alt patriot. am luptat împotriva voinţei mele”. Galois subliniază, de

asemenea, vehement şi buna sa credinţă: „să spuneţi că nu sunt capabil să mint”.

A treia şi, din perspectivă ştiinţifică, cea mai importantă scrisoare25 este cea care conţine testamentul matematic al lui Galois. Deosebit de lungă, aceasta este adresată devotatului său prieten Auguste Chevalier şi prezintă rezumate concise ale conţinutului faimosului memoriu respins de Poisson şi Lacroix, precum şi ale altor lucrări.

Dragul meu prieten.

Am făcut câteva descoperiri noi în analiză. Prima priveşte teoria ecuaţiilor, celelalte, funcţiile integrale.

În teoria ecuaţiilor, am investigat în ce condiţii sunt ecuaţiile rezolvabile prin radicali [printr-o formulă]: aceasta mi-a dat oportunitatea să aprofundez teoria şi să descriu toate transformările ce se pot aplica unei ecuaţii, chiar dacă ea nu este rezolvabilă prin radicali.

Toate acestea alcătuiesc trei memorii.

El schiţează apoi ceea ce astăzi numim *teoria lui Galois,* adăugând câteva noi teoreme la conţinutul manuscrisului original, înaintat academiei. Către sfârşit, Galois scrie: „Tu ştii, dragul meu Auguste, că aceste subiecte nu sunt singurele pe care le-am explorat”. Apoi, dând o scurtă descriere a altor câteva teme, conchide cu regret: „N-am timp şi ideile mele nu sunt suficient de dezvoltate în acest domeniu – care e imens”.

În final, ca şi Abel înaintea lui, el îşi pune încrederea în judecata matematicianului german Jacobi: „Cere-i public lui Jacobi sau lui Gauss să-şi spună părerea, nu cu privire la adevărul, ci la importanţa acestor teoreme. După aceea, sper că unii vor găsi util să descifreze această harababură. Te îmbrăţişez cu efuziune”. Un singur lucru mai rămăsese de făcut – să lase în ordine manuscrisele. El a trecut rapid prin toate studiile sale matematice şi a făcut unele corecţii şi comentarii de ultim minut. Una dintre adnotări (figura 66) conţine cel mai memorabil şi cel mai trist citat: *„Je n’ai pas le temps”* – „N-am timp”.

Duelul a avut loc în primele ore ale dimineţii de 30

mai 1832, în apropierea iazului Gheţarului de la Gentilly (astăzi, în cel de al treisprezecelea arondisment al Parisului). Circumstanţele exacte ale acestei drame nu se cunosc. Conform raportului de autopsie, Galois a fost împuşcat în stomac, din partea dreaptă. Glonţul a străpuns mai multe segmente ale intestinului înainte de a se opri în fesa stângă. Ce s-a petrecut după aceea este neclar. Au părăsit martorii scena? Sau unul dintre ei este cel care l-a dus pe Galois la spital? Registrele spitalului Cochin

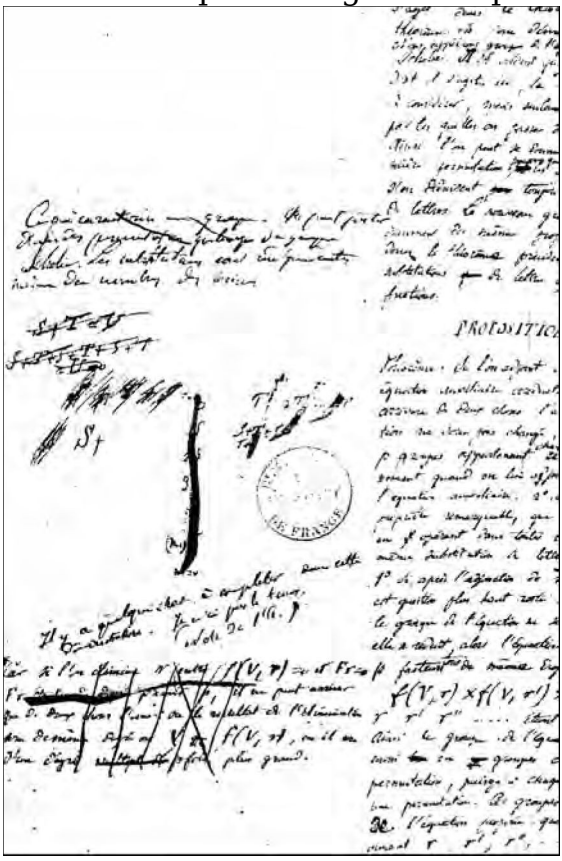


Figura 66

arată că Galois a fost adus la ora 9, 30 dimineaţa (figura 67 arată intrarea şi una dintre aripile spitalului, pe la sfârşitul secolului al XIX-lea) şi i s-a repartizat patul numărul 6 în pavilionul Saint-Dénis. Conform unei mărturii

mult ulterioare a vărului lui Galois, Gabriel Demante, cel care l-a transportat la Cochin era un ţăran aflat în trecere, dar o notă din *Magasin Pittoresque,* scrisă de Pierre Paul Flaugergues, un fost coleg de clasă al lui Evariste, îi atribuie acest rol de samaritean unui „fost ofiţer”.

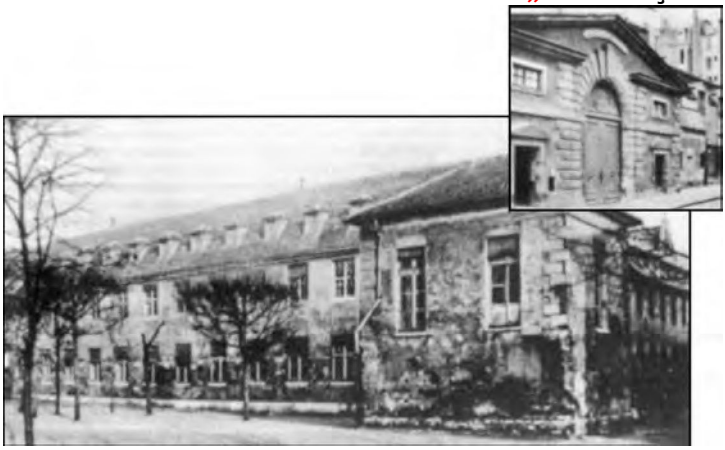


Figura 67

Fratele mai mic al lui Galois, Alfred, singurul membru al familiei care a fost anunţat, s-a grăbit să se ducă la spital. Chirurgul de serviciu, Denis Guerbois, şi-a dat seama imediat că sfârşitul era aproape, ceea ce nu le-a scăpat nici celor doi fraţi. Încă pe deplin conştient, Galois a refuzat serviciile unui preot26. Lui Alfred, care plângea amarnic, el i-a cerut drept consolare: „Nu plânge; trebuie să-mi fac curaj ca să mor la 20 de ani”. Évariste Galois a decedat la ora 10 a.m., pe 31 mai, iar certificatul de deces a fost semnat27 pe 1 iunie. Moartea a trecut aproape neobservată. Pe 31 mai, *Bulletin de Paris* anunţa28 eronat: „Moartea lui Legallois”.

Ziarul din Lyon *Le Précurseur,* care avea strânse legături cu Prietenii Poporului, a publicat în numerele sale din 4 şi 5 iunie următoarea relatare (figura 68):

Paris, 1 iunie – Un deplorabil duel a răpit ieri ştiinţelor exacte un tânăr care dădea cele mai mari speranţe, dar a cărui precoce celebritate nu evocă, totuşi, decât amintiri politice. Tânărul Évariste Galois, condamnat

la un an de închisoare pentru toastul rostit la banchetul de la Vendanges de Bourgogne, s-a duelat cu unul dintre vechii săi prieteni, foarte tânăr şi el, tot membru al societăţii Prietenilor Poporului, despre care se ştie că a fost implicat, de asemenea, într-un proces politic. Se spune că amorul a fost cauza luptei. Pistolul fiind arma aleasă de cei doi adversari, ei au găsit că e foarte greu, din punctul de vedere al vechii lor prietenii, să ţintească unul asupra celuilalt şi s-au lăsat în seama deciziei oarbe a sorţii. La distanţă foarte mică unul de altul, fiecare dintre ei a fost înarmat cu un pistol şi a tras. Numai una dintre aceste arme era încărcată. Galois a fost străpuns dintr-o parte în alta de glonţul adversarului său; a fost transportat la spitalul Cochin, unde a murit după aproximativ două ore. Era în vârstă de 22 de ani. L.D., adversarul său, este puţin mai tânăr.

— Un *duel* déplorable a enlevé hier ans. sciences exactes no jeune homme qui donnait les plus hautes espérances, et dont la célébrité précoce, De rappelle cependant que des souvenirs politiques. Le jeune Evariste Gallois, condamné il y a un an pour des propos tenus au banquet des Yendanges de Bourgogne*, s'est* battu avec un de ses anciens amis, tout jeune homme comme lui, comme lui membre de la société des Amis du Peuple, et qui avait, pour dernier rapport avec lui «d'avoir figuré également dans un procès politique. On dit que l'amour a été la cause du combat-Le pistolet étant l'arme choisie par *les* deux adversaires, ils ont trouvé trop dur pour leur ancienne amitié d'avoir à viser l'nu sur l'autre, et ils s'en sont remis à l'aveugle décision du sort. A bout portant, chacun d'eux a été armé d'un pistolet, et a fait feu. Une seule de ces armes était chargée. Gallois a *été percé* d'outre en outre par ia balle de son adversaire; on la transporté à l'hôpital Cochin, où il est mort au boat de deux heures. Il était ăgé de 22 ans. L.D., son adversaire, est un peu plus jeune encore.

Figura 68

Ca în multe alte cazuri de relatare în presă a unui eveniment care, întâmplător, ne este familiar, această istorisire e încărcată cu inexactităţi. Duelul a avut loc pe 30, nu pe 31 mai; conform raportului de autopsie, împuşcătura nu a fost de „la distanţă foarte mică”, ci de la 25 de paşi; el nu fusese „condamnat la un an de închisoare”, ci la şase luni; nu era în vârstă de 22 de ani, ci de numai 20. De aceea, şi restul informaţiilor din acest articol trebuie privite cu scepticism. Lucru adevărat îndeosebi dacă ne gândim că relatarea a apărut în Lyon, departe de capitală. Cu toate acestea, dacă ar fi să luăm în serios descrierea detaliată a adversarului, pentru cine s-ar potrivi ea? Răspunsul este lesne de dat: pentru Duchatelet. El era, într-adevăr, un pic mai tânăr decât Galois, fusese arestat cu el pe Pont Neuf şi fusese judecat puţin înaintea lui. Dar numele mic al lui Duchatelet era Ernest, iar articolul dădea iniţialele „L.D”.

Mai există câteva piese de dosar pe care le-am putea lua în considerare. Mai întâi, vărul lui Galois, Gabriel Demante, i-a scris primului biograf al lui Galois, Paul Dupuy, că la ultima întâlnire a lui Galois cu Stéphanie, Evariste s-a găsit în prezenţa a „unui aşa-zis unchi şi a unui aşa-zis logodnic”, fiecare dintre ei provocând duelul. Galois însuşi a vorbit mereu de doi bărbaţi (atât în scrisoarea „către toţi republicanii”, cât şi în scrisoarea către prietenii săi). De aceea, orice încercare de a descoperi adevărul trebuie să identifice ambii adversari, nu numai unul.

În al doilea rând, amintiţi-vă că scriitorul Alexandre Dumas, atunci când descrie în memoriile sale evenimentele legate de dezastruosul toast rostit de Galois, îl numeşte pe Pescheux d’Herbinville drept ucigaşul lui Galois. Deşi, în mod normal, n-ar trebui să considerăm „D” drept iniţială lui d’Herbinville, practicile şi stilul scrierii numelor în secolul al XIX-lea permiteau asemenea libertăţi. Spre exemplu, numele de familie al lui Stéphanie se scria uneori du Motel, alteori Dumotel. Chiar şi numele de

familie dinspre partea maternă a lui Evariste s-a schimbat din de Mante în Demante (anexa 8). Pescheux d'Herbinville n-a fost niciodată într-un proces cu Galois, dar a fost în „procesul celor nouăsprezece".

În cele din urmă, şeful poliţiei Henri-Joseph Gisquet (1792 – 1866) scria în memoriile sale, în 1840, că Galois „a fost ucis de un prieten".

Spre ce converg oare toate acestea?

O mulţime de teorii ale conspiraţiei

Câţiva biografi ai lui Galois, nu mulţi, au concluzionat că Galois fusese ucis de inamicii politici. Unii dintre aceştia au inclus în comploturile lor imaginare chiar şi o intrigă, presupunând că „infama cochetă" era, de fapt, o prostituată sau o misterioasă agentă de poliţie, care a acţionat ca provocatoare. Acest lucru nu este surprinzător. Chiar şi Alfred Galois a rămas convins întreaga viaţă că fratele său fusese victima poliţiei secrete a regelui. Dar există vreo dovadă convingătoare pentru asemenea teorii ale conspiraţiei? Nu, categoric. Cele mai multe dintre aceste povesti fanteziste au fost create *înainte* de identificarea certă a lui Stéphanie du Motel ca fiind „infama cochetă". Investigaţia „medico-legală" care a dezvăluit identitatea ei a fost efectuată de un detectiv sui-generis – un preot uruguayan. Carlos Alberto Infantozzi de la Universitatea din Montevideo efectiv nu se putea da bătut. Mai întâi, el a utilizat o lupă şi o lumină specială pentru a descoperi numele şi semnătura lui Stéphanie sub ştersăturile lui Galois de pe câteva din manuscrisele sale. Apoi, el s-a chinuit să scotocească prin arhive pentru a descoperi numele tatălui ei, Jean Louis Auguste Potterin du Motel, şi adresa familiei, de la căminul de convalescenţi Faultrier. Este aproape sigur că Stéphanie nu era nici prostituată, nici agent de poliţie. Ea s-a căsătorit în cele din urmă, pe 11 ianuarie 1840, cu Oscar Théodore Barrieu, profesor de limbi străine. Tatăl lui Stéphanie nu era medic, aşa cum au dedus unii biografi de la Infantozzi, ci fost ofiţer în armata lui Napoleon şi inspector în sistemul penitenciar. El a decedat cam pe vremea când s-a căsătorit

fiica sa. Fratele lui Stéphanie, Eugene P. Potterin du Motel, a ajuns în cele din urmă medic, dar n-avea decât 16 ani pe timpul „povestit” lui Stéphanie cu Galois. Cercetătorul Jean-Paul Auffray, care a efectuat ceea ce este probabil cea mai extinsă investigaţie a documentelor referitoare la Galois, a descoperit un alt fapt interesant. Denis Louis Grégoire Faultrier, după care a fost numit căminul de convalescenţi, fusese el însuşi căpitan în garda naţională. După moartea tatălui lui Stéphanie, acest prieten intim al familiei Potterin du Motel s-a căsătorit cu mama lui Stéphanie. După cum vom vedea peste puţin timp, acest detaliu poate oferi o piesă crucială a tabloului în curs de reconstituire.

Atunci, v-aţi putea întreba, oare de ce insista Alfred Galois să susţină că fratele său fusese asasinat de poliţie? Trebuie să ne reamintim că Alfred, pe atunci în vârstă de 18 ani, avea o infinită admiraţie pentru fratele mai mare. Pentru el, ideea că genialul, cumsecadele, dar altminteri sentimentalul şi nesocotitul său frate era implicat într-un duel trebuie să fi fost atât de absurdă, încât singura explicaţie posibilă i s-a părut a fi cea a unui joc necinstit. Primul biograf al lui Galois, Dupuy, al cărui substanţial articol a fost publicat în 1896, a concluzionat că în toate afirmaţiile lui Alfred (inclusiv o pretenţie total nefondată că Galois a tras mai întâi în aer) „se simte o invenţie romantică”. Fizicianul şi autorul Tony Rothman, în prezent la Bryn Mawr Collège, a ajuns la o concluzie similară. După o examinare aprofundată a multor biografii existente în 1982 (şi a unor lucrări ulterioare), el a conchis că „poveştile lui Bell, Hoyle şi Infeld [toţi biografi ai lui Galois] sunt invenţii baroce, dacă nu chiar bizantine”. Sunt total de acord.

Există însă şi o altă teorie a conspiraţiei, care se impune să fie luată serios în considerare. Într-una dintre cele mai recente şi mai extinse biografii ale lui Galois, italianca Laura Toţi Rigatelli, matematician şi istoric al matematicii, propune teza că faimosul duel n-ar fi avut loc, de fapt, niciodată. Ea a ajuns la concluzia că deprimatul şi

deziluzionatul Galois a decis să se sacrifice pentru cauza republicană. Republicanii aveau nevoie de un cadavru ca să stârnească rebeliunea şi el a oferit acest cadavru – duelul era în întregime regizat. Deducţia lui Toţi Rigatelli se bazează pe o cercetare de mare anvergură şi, în particular, pe o examinare a scrierilor prefectului de poliţie Gisquet şi ale unuia dintre spionii săi sub acoperire, Lucien de la Hodde.

Deşi teoria lui Toţi Rigatelli este cert interesantă, personal, eu nu o găsesc deosebit de convingătoare. Pentru ca istorisirea ei să reziste, Toţi Rigatelli este forţată să susţină că Galois a fabricat ultimele sale trei scrisori, pentru a „evita ca cineva să suspecteze adevărata împrejurare a morţii sale”. Acest lucru nu ar fi numai în totală contradicţie cu felul de a fi al lui Galois, care a ţinut mereu cu tărie la adevăr, aşa cum îl vedea el, dar ar fi şi incompatibil cu teoria însăşi a conspiraţiei. Cu siguranţă, pentru a instiga la revoluţie, o scrisoare blamând poliţia pentru moartea sa ar fi fost mult mai eficace. O examinare mai atentă a scenariului conceput de Toţi Rigatelli dezvăluie că ceea ce ea priveşte drept cea mai tare piesă probatoare în sprijinul ipotezei că Galois s-a sacrificat este, în exprimarea sa, „insistenţa asupra unei morţi sigure”, ce reiese din scrisorile lui „către toţi republicanii” şi către Lebon şi Delaunay. Dar la ce altceva ne-am putea aştepta de la epistolele de adio ale unui romantic zdrobit, în vârstă de 20 de ani, scrise în ajunul unui duel? În afară de asta, aşa cum voi argumenta peste puţină vreme, există motive să credem că cel puţin unul dintre adversarii lui Galois mânuia mult mai bine pistolul decât tânărul matematician. De aceea, este pe deplin de înţeles de ce se aştepta Galois la o moarte sigură. Atunci, cine l-a ucis pe Galois şi de ce a fost el ucis?

Moartea unui romantic

Dovezile acumulate lasă foarte puţină îndoială cu privire la realitatea duelului. Indiciile spun, de asemenea, că acesta era un caz clasic de *cherchez la femme.* Prin unele cuvinte neatente sau printr-un comportament prea

impetuos, Galois a ofensat-o cumva pe tânăra doamnă, care i-a informat imediat pe alţi doi bărbaţi. Când aceşti „păcăliţi" s-au confruntat cu Galois, el a mai făcut o greşeală, referindu-se la întreaga afacere ca la „o mizerabilă clevetire" şi adăugând, deci, o insultă la injurie. Consecinţele au fost dezastruoase. Grăbiţi să apere onoarea lui Stéphanie, cei doi bărbaţi l-au provocat pe Galois la duel. Cine erau aceşti doi bărbaţi? Din scrisoarea lui Galois, ştim că ei erau, amândoi, „patrioţi" republicani. Limbajul lui Galois sugerează, de asemenea, cu tărie că cel puţin unul dintre cei doi adversari avea o oarecare poziţie de autoritate, căreia Galois s-a simţit silit să-i cedeze. Atât tatăl lui Stéphanie, Jean Louis Potterin du Motel, un fost ofiţer în Marea Armată a lui Napoleon, cât şi proprietarul căminului de convalescenţi, Denis Faultrier, un fost căpitan în garda naţională, corespund cu acest profil. Să observăm, totuşi, că cel din urmă ar fi compatibil şi cu o altă piesă de dosar. Vărul lui Galois l-a descris pe unul dintre adversari drept un „aşa-zis unchi". Faultrier, prieten apropiat de familie, care ulterior s-a căsătorit cu mama lui

Stéphanie, se potriveşte ca o mănuşă cu această descriere. Cât priveşte identitatea celui de-al doilea adversar, situaţia este oarecum mai puţin clară. În recenta şi bine documentata sa biografie a lui Galois, Auffray sugerează că cei doi bărbaţi erau tatăl lui Stéphanieşi Faultrier. Această concluzie ignoră atât mărturia vărului (cu privire la un „aşa-zis logodnic"), cât şi descrierea din *Le Précurseur,* ceea ce eu găsesc dificil de acceptat. Deşi articolul din *Le Précurseur* conţine multe inexactităţi, acestea sunt de tipul la care ne aşteptăm de la asemenea relatări. Combinaţia dintre descrierea lui Gabriel Demante a unui „aşa-zis logodnic" şi relatarea din ziar pare să implice un presupus iubit. Dar pe cine?

Ernest Armand Duchatelet, tânăr student la École des Chartesşi prieten al lui Galois, se potriveşte cel mai bine. Să ne reamintim că şi prefectul Gisquet a depus mărturie că Galois „a fost ucis de un prieten". Trebuie să admit că am fost incapabil să găsesc vreo dovadă

documentată că Duchatelet ar fi petrecut un timp la căminul de convalescenţi Faultrier – el a fost eliberat din închisoare cu mai multe luni înainte de a se fi transferat Galois acolo. Totuşi, fiindcă deţinuţii politici erau de obicei plasaţi pe cuvânt de onoare în astfel de „case de sănătate”, Duchatelet s-ar putea să fi fost acolo înainte de sosirea lui Galois. În afară de asta, lui Galois îi era îngăduit să primească vizitatori şi, într-adevăr, prietenul său Auguste Chevalier a venit să-l vadă acolo. N-ar fi o exagerare incredibilă să presupunem că a fost vizitat şi de Duchatelet. În sfârşit, împotrivirea celor doi prieteni (descrisă în ziar) de a ţinti unul asupra altuia şi decizia lor, încărcând numai un pistol, de a lăsa soarta oarbă să determine cine avea să moară, este pe deplin compatibilă cu caracterele lor29 (vezi şi notele).

Este posibil ca adversarul să fi fost Pescheux d’Herbinville? Nu foarte probabil. El nu se potriveşte cu descrierea din ziar; avusese foarte puţine ocazii, dacă a avut, de a o întâlni pe Stéphanie (fiind dintr-un cerc social foarte diferit) şi există posibilitatea să fi fost homosexual (cum se insinuează în descrierea pe care i-o face Dumas). Atunci, de ce oare l-o fi numit Dumas? Nu ştiu de ce, dar este cunoscut faptul că Dumas a greşit30 cu astfel de detalii în multe ocazii. Să fi confundat un tânăr republican cu un altul, n-ar fi de mirare.

Iată de ce as îndrăzni să propun31 varianta ca cei doi adversari ai lui Galois să fi fost Duchatelet şi Faultrier. Dar este, cu aceasta, rezolvat misterul vechi de aproape două sute de ani cu privire la persoana care l-a ucis pe Galois şi motivul ei? Poate. Deşi cred cu tărie că acest duo Faultrier-Duchatelet este compatibil cu toate faptele cunoscute, fiind absentă orice informaţie solidă, dacă nu apar noi dovezi în viitor, vor mai rămâne multe incertitudini.

Presupunând că această concluzie cu privire la identitatea celor doi adversari este corectă, se poate creiona următorul tablou al evenimentelor din ziua duelului: în dimineaţa de 30 mai 1832, Galois şi Duchatelet

s-au înfruntat de la 25 de paşi, cu Faultrier aşteptându-şi rândul. Printr-o procedură gen ruletă rusească, Duchatelet s-a întâmplat să aleagă arma încărcată şi l-a împuşcat pe Galois.

Raportul de autopsie dezvăluie două informaţii suplimentare interesante. Prima, deşi Galois fusese lovit din lateral, el nu stătuse complet întors într-o parte32, într-un mod care să fi minimizat şansele de a fi nimerit. Nu-şi dorea să trăiască? Dată fiind starea sa mintală, acest lucru nu-i imposibil. La urma urmei, din mohorâtul punct de vedere al lui Galois, povestea vieţii sale ar putea fi rezumată, mai mult sau mai puţin, după cum urmează: două încercări ratate de a intra la École Polytechnique, trei memorii respinse de academie, două întemniţări şi o inimă zdrobită de dragoste neîmpărtăşită. De fapt, cu puţin înainte să moară, Galois s-a desenat pe el însuşi sub forma lui Riquet à la Houppe33 (figura 69), un pitic cocoşat imaginar, care era foarte deştept şi se purta cavalereşte, dar toată lumea din juru-i îl batjocorea. În această poveste din secolul al XVII-lea, Riquet a vindecat o tânără femeie de stupiditate şi, în cele din urmă, i-a câştigat dragostea, devenind simbolul unei transformări de tip Frumoasa şi Bestia. Trist, dar Galois a fost mai puţin norocos în viaţa reală. În al doilea rând, raportul de autopsie descrie o contuzie mare la capul lui Galois, cauzată probabil de căzătură. Dacă era inconştient în urma loviturii şi a fost

Figura 69

presupus mort, s-ar putea explica un fapt care i-a nedumerit pe mulţi dintre biografii săi – majoritatea (dacă nu toţi) celor prezenţi la duel au părăsit scena. Potenţială identificare a lui Faultrier drept unul dintre adversari rezolvă un alt mister care i-a intrigat pe mulţi cercetători – de ce nu l-a dus unul dintre martori pe Galois la spital? În scenariul propus, Faultrier, „fostul ofiţer”, ar putea fi, într-adevăr, cel care l-a transportat pe Galois la Cochin. Un indiciu privitor la faptul că Galois îşi amintea în permanenţă de tatăl lui ar putea fi furnizat de următoarea curiozitate: întrebat la spital de adresa sa, Galois a indicat Rue Saint-Jean-de-Beauvais numărul 6, adresa din Paris la care Nicolas-Gabriel îşi luase viaţa.

Faimă postumă înmormântarea lui Galois avu loc sâmbătă, pe 2 iunie. Au luat parte mii de prieteni, membri ai Prietenilor Poporului, şi delegaţii de studenţi de la şcolile de drept şi de medicină. Conducătorii Prietenilor Poporului, Plagniol şi Charles Pinel, au rostit înflăcărate panegirice. Dacă republicanii aveau planuri să profite de înmormântare pentru a provoca o răzmeriţă, acestea au fost rapid dejucate de o neaşteptată întorsătură a evenimentelor. Prefectul de poliţie Gisquet, care în seara precedentă arestase circa 30 de republicani drept măsură de precauţie, urmărea cu atenţie procesiunea. El scrie în memoriile sale34:

Pe 2 iunie, republicanii au însoţit, în număr de două până la trei mii, procesiunea funerară a lui Legallois [scriind greşit Galois], cu intenţia de a ridica baricade la întoarcere; dar au aflat de moartea Generalului Lamarque [un faimos general din armata lui Napoleon] şi şi-au dat imediat seama de avantajul pe care l-ar putea avea de pe urma unui asemenea eveniment şi de mulţimea pe care înmormântarea generalului35 ar putea-o atrage. Planul lor s-a modificat imediat: coşciugul unui general al Imperiului, al unui deputat patriot, este cel care va da semnalul începerii rebeliunii. Mişcarea a fost, de aceea, amânată până pe data de 5.

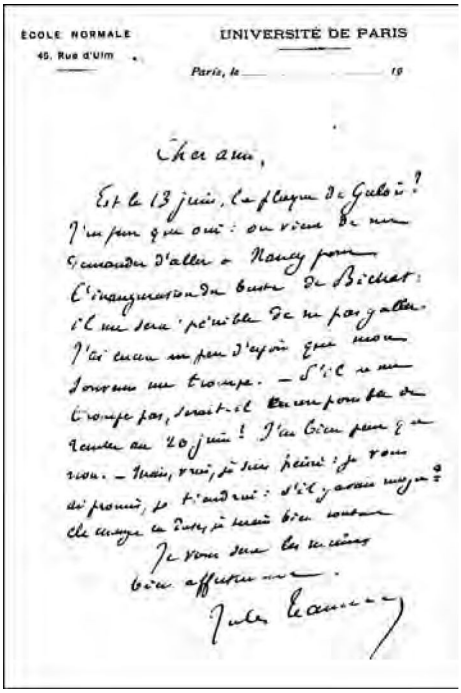
Soarta l-a lipsit deci pe Galois până şi de ocazia de a incita la o rebeliune după moartea sa. Adânc mişcat, Auguste Chevalier a scris un scurt necrolog, care a apărut în septembrie 1832.

Din fericire, divinităţile au fost mai generoase cu testamentul matematic al lui Galois. Doi tineri perseverenţi – fratele său, Alfred, şi prietenul său, Auguste Chevalier – şi-au asumat misiunea de a se asigura că amintirea lui Evariste şi studiile sale matematice vor fi salvate de la uitare (figura 70 prezintă un portret al lui Galois, desenat din memorie de Alfred36, în 1848). Cu scrupulozitate, ei au adunat fiecare bucată de hârtie, au catalogat toate manuscrisele şi au înmânat preţioasa lor comoară matematicianului Joseph Liouville (1809 – 1882). Acesta

din urmă, copleşit de admiraţie, şi-a început astfel adresa către Academia de Ştiinţe: „Sper să stârnesc interesul Academiei anunţând că între hârtiile lui Evariste Galois am găsit o soluţie – pe cât de exactă, pe atât de profundă – a acestei frumoase teoreme: Dată fiind o ecuaţie ireductibilă de grad prim, de decis dacă este rezolvabilă sau nu prin radicali”. Liouville a publicat memoriile lui Galois în revista sa din 1846, anunţând lumii:

„Am recunoscut exactitatea deplină a metodei prin care Galois demonstrează, în particular, această frumoasă teoremă [despre rezolvabilitatea ecuaţiilor]”. Curând avea să urmeze o recunoaştere mai largă. Jacobi, în care îşi pusese Galois încrederea, s-a dovedit a fi la înălţimea unei asemenea sarcini. Citindu-i studiile în revista lui Liouville, el l-a contactat imediat pe Alfred, într-o încercare de a afla mai multe amănunte despre lucrarea lui Galois asupra funcţiilor transcendentale. În 1856, teoria lui Galois era introdusă în cursurile avansate de algebră din Franţa şi Germania.

Şcoala care îl exmatriculase pe Galois şi-a schimbat şi ea sentimentele până la urmă. Cu ocazia celebrării centenarului, École Normale i-a cerut faimosului matematician norvegian Sophus Lie (1842 – 1899) să scrie un articol care să rezume impactul teoriei lui Galois asupra istoriei matematicii. Lie concluziona37: „Este deosebit de caracteristic pentru matematici că două dintre cele mai profunde descoperiri făcute vreodată (teorema lui Abel şi teoria ecuaţiilor algebrice, a lui Galois) au rezultat din munca a doi geometri, dintre care unul, Abel, era în vârstă de aproximativ 22 de ani, iar celălalt, Galois, nu împlinise 20”. În 1897, când marele matematician Emile Picard (1856 – 1941) a evaluat realizările matematice ale secolului al XIX-lea, a avut următorul lucru de spus despre Galois: „Nimeni nu-l întrece în originalitatea şi profunzimea concepţiilor sale”.


ÉCOLE NORMALE
45, Rue d'Ulm

UNIVERSITÉ DE PARIS

Paris, le ... 19

Cher ami,

Et le 13 juin, la plaque de Galois ?
J'ai peur que oui : on vient de me
demander d'aller à Nancy pour
l'inauguration du buste de Bichat :
il me sera pénible de ne pas y aller.
J'ai encore un peu d'espoir que mon
horoscope me trompe. — S'il ne me
trompe pas, serait-il impossible de
reculer au 20 juin ! J'ai bien peur que
non. — Mais, vrai, je suis peiné : je vous
dirai promis, je tiendrai : s'il y avait moyen
de changer la date, je serais bien content.

Je vous serre les mains
bien affectueusement.

Jules Tannery

Figura 71

Toţi elevii de la École Normale erau prezenţi pe 13 iunie 1909, când directorul ei, Jules Tannery, a venit la Bourg-la-Reine ca să facă o prezentare specială cu ocazia punerii plăcii comemorative38 de pe casa lui Galois (figura 71 arată o scrisoare de la Tannery către primarul din Bourg-la-Reine, iar figura 72 arată placa pe casa originală). Abia stăpânindu-şi emoţiile, Tannery a încheiat cu o mişcătoare mea culpa39:

Am onoarea să rostesc aici o cuvântare, din poziţia pe care o deţin la École Normale. Vă mulţumesc, Domnule Primar, că mi-aţi permis să cer iertare geniului lui Galois în numele acestei şcoli în care a intrat fără tragere de inimă, unde nu a fost înţeles, care l-a dat afară, dar pentru care el a fost, la urma urmelor, una dintre cele mai strălucite glorii.

Aceste cuvinte sincere îmi răsunau în urechi în vreme ce stăteam în cimitirul din Bourg-la-Reine, unde amintirile lui Nicolas-Gabriel şi Evariste Galois sunt de nedespărţit

astăzi (figura 73), aşa cum au fost tatăl şi fiul în timpul scurtei vieţi a lui Evariste.

Dar, oricât de ingenios ar fi, cum poate un instrument inventat pentru determinarea rezolvabilităţii ecuaţiilor să evolueze până la nivel de limbaj descriptiv al tuturor simetriilor lumii?

La urma urmelor, atunci când discutăm despre simetrii, nu ne gândim în primul rând la ecuaţii algebrice. Nici măcar Galois nu era sigur unde avea să ducă teoria sa: „V a fi posibil să se înţeleagă pe deplin teza generală pe care o avansez numai dacă cineva cu aplicaţie pentru ea citeşte lucrarea mea cu atenţie". Acesta este exact locul unde apare magia unificatoare a teoriei grupurilor – acea „măreţie a gândirii pornind de la începuturi atât de modeste", pe care o aprecia aşa de mult matematicianul britanic H.F. Baker. Pentru a ne da seama de incredibila putere de cuprindere a conceptului avansat de Galois, ne vom întoarce acum la domeniul grupurilor şi simetriilor. Figura 73

6

Grupurile

G

alois a întors întreaga algebră cu susul în jos. Când vreţi să ştiţi dacă o ecuaţie este rezolvabilă sau nu, pur şi simplu încercaţi s-o rezolvaţi, nu-i aşa? Greşit, spune Galois. Tot ceea ce aveţi de făcut este să examinaţi permutări ale soluţiilor, presupuse ca fiind existente. Cum pot permutările unor soluţii pe care nici măcar nu le cunoaşteţi să vă spună ceva despre rezolvabilitate? Faptul că ele pot furniza măcar câteva informaţii noi se cunoştea de multă vreme în lumea exterioară matematicii. Anagramele – cuvinte sau fraze formate de literele altora, dispuse în ordine diferită – exact asta fac. Luaţi numele GALOIS, spre exemplu. Dacă admitem anagrame de două cuvinte, ajungem la combinaţii precum OIL GAS, LAS GOI, LA SOGI. Câte aranjamente diferite (neţinând seama de înţeles) ale literelor din GALOIS putem realiza? Răspunsul nu este dificil, dar am putea începe cu un caz şi mai

simplu, pentru a descoperi regula generală. Literele A şi B permit două aranjamente: AB şi BA. Trei litere, A, B, C, pot forma şase permutări: ABC, ACB, BAC, BCA, cAb, CBA. Modelul care apare este simplu. Cu A, B, C, există trei poziţii unde poate fi pus A (prima, a doua şi a treia). Pentru fiecare dintre aceste trei alegeri făcute pentru A, există exact două locuri rămase pentru litera B (de ex., dacă A este a doua, B poate fi prima sau a treia), iar pentru C mai rămâne un singur loc. Numărul total de aranjamente este de aceea 3 X 2 X 1 = 6. Aceeaşi logică se aplică la orice număr de obiecte. Pentru cele şase litere ale cuvântului GALOIS, există 6 X 5 X 4 X 3 X 2 X 1 = 720 de permutări diferite, iar pentru un număr *n* oarecare de obiecte există *n X (n* – 1) X (n – 2) X (n – 3) X... X 1 permutări. Pentru a economisi spaţiu, matematicianul francez Christian Kramp (1760 – 1826) a introdus notaţia *n*! (n *factorial)* pentru a nota acest ultim produs. Numărul de permutări realizate cu *n* obiecte diferite este de aceea tocmai *n*!

Unul dintre cele mai vechi studii ale permutărilor nu apare într-o carte de matematică, ci într-una a misticismului iudaic, ce datează dintr-o perioadă situată între secolele al III-lea şi al VI-lea. *Sefer yetzira*1 (Cartea Creaţiunii) este scurtă, enigmatică şi îşi propune să rezolve misterul creaţiei examinând combinaţiile literelor alfabetului ebraic. Premisa generală a cărţii (atribuită de legenda kabalistică strămoşului evreilor, Avraam) este că diferite categorii de litere formează blocuri constructive divine, din care pot fi clădite toate lucrurile. În acest spirit, cartea afirmă că „două litere alcătuiesc două cuvinte, trei alcătuiesc şase cuvinte, patru alcătuiesc 24 de cuvinte, cinci alcătuiesc 120, şase alcătuiesc 720, şapte alcătuiesc 5 040”.

Pentru a vedea cum descoperirea relaţiilor dintre permutări şi proprietăţile lor poate conduce la o înţelegere nouă şi mai profundă, să examinăm operaţia care permută2 GALOIS în AGLISO. Această operaţie (cu notaţia introdusă în Capitolul 2) este reprezentată de:

(GALOIS)

(AGLISO/

unde fiecare literă din rândul de sus se înlocuieşte cu litera aflată direct sub ea. Şi anume, G se înlocuieşte cu A, A cu G, L rămâne pe loc, O s-o înlocuieşte cu I, I cu S şi S cu O.

Ce se întâmplă dacă aplicăm aceeaşi operaţie de două ori? Puteţi verifica lesne că efectuarea exact a aceloraşi substituţii a doua oară transformă AGLISO în GALSOI. Să ne imaginăm acum că un calculator electronic o ia razna, repetând aceeaşi operaţie, să zicem, de 1 327 de ori. Putem prezice rezultatul final? Fireşte, l-am putea găsi aplicând operaţia iar şi iar, dar acest lucru este extrem de plictisitor şi, în mod sigur, expus la multe greşeli. Există un mod mai lesnicios de a găsi răspunsul? Poate că doriţi să petreceţi câteva minute gândindu-vă la această problemă, fiindcă descifrarea ei dezvăluie interesante proprietăţi ale permutărilor, care sunt în spiritul demonstraţiei lui Galois. În orice caz, voi da acum soluţia.

În matematica distractivă, permutările şi caracteristicile lor au jucat un rol important în cel puţin două foarte cunoscute jocuri – aşa-zisul puzzle 14 – 153 şi cubul lui Rubik.

Puzzle-ul 14 – 15 a fost introdus în anii 1870 de cel mai mare autor american de jocuri distractive, Samuel Lloyd (1841 – 1911) şi, un timp, a scos din minţi o lume întreagă. Pe vremea aceea, Lloyd era deja cel mai mare autor de probleme de şah din Statele Unite, precum şi titularul rubricilor de şah din mai multe reviste. Chiar şi mai înainte de celebrul puzzle 14 – 15, el publica o largă varietate de alte tipuri de probleme de matematică distractivă.

Acest puzzle 14 – 15 constă într-o grilă de 4 X 4 piese numerotate de la 1 la 15 (figura 74 a). Scopul general era de a deplasa piesele în sus, în jos sau lateral, aşa încât, pornindu-se e la orice configuraţie iniţială, să se ajungă la o succesiune firească. Versiunea particulară a acestui puzzle, care a produs atâta vâlvă, a fost cea în care toate

numerele erau în ordine normală, cu excepţia lui 14 şi 15, care erau inversate (ca în figura 74 b). Lloyd a oferit un premiu de o mie de dolari primei persoane care putea prezenta o serie de deplasări ducând la schimbarea între ele a pieselor 14 şi 15. Enigma a creat o manie fără precedent şi a fascinat oameni din toate categoriile sociale. Fiul lui Lloyd, care a publicat ulterior o interesantă colecţie de probleme distractive concepute de tatăl său (numită *Cyclopedia of Puzzles),* scria în descrierea nebuniei universale iscate de aici că „se ştie că fier

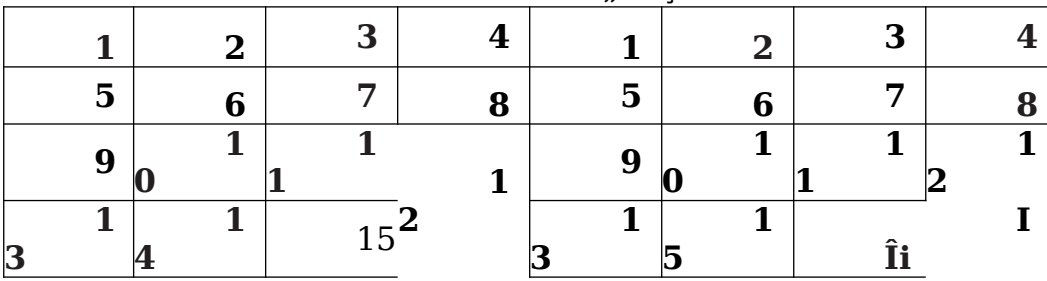


Figura 74

mierii şi-au părăsit plugurile” pentru a se lupta cu încăpăţânata enigmă. În realitate, Lloyd ştia foarte bine că nu riscase absolut nimic oferind premiul – el putea demonstra că puzzle-ul nu putea fi rezolvat. Pentru a înţelege fondul demonstraţiei lui Lloyd, să considerăm, de exemplu, următoarea permutare:

(1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15!

(1 2 3 4 6 7 8 12 5 10 11 15 9 13 14/

Puteţi lesne descoperi că această permutare este realizabilă pe baza grilei 1 – 15 a lui Lloyd, dacă este aranjată iniţial în ordine normală (ca în figura 74 a). Chiar şi dacă nu aveţi grila lui Lloyd la îndemână, trasând mintal următoarea secvenţă de mişcări (unde fiecare număr reprezintă piesa ce trebuie deplasată în spaţiul liber) – 15, 14, 13, 9, 5, 6, 7, 8, 12, 15 –, veţi constata că aceasta produce permutarea indicată mai sus. Să numărăm câte perechi de numere din această permutare nu sunt în

ordinea naturală. Spre exemplu, în ordinea naturală, 6 vine după 5, dar în această permutare ordinea lui 6 şi 5 este inversată. Putem lua pe rând fiecare cifră din rândul al doilea, pentru a socoti numărul de inversări:

1	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
2	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
3	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
4	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
6	este urmat de	5	1 versare
7	este urmat de	5	1 versare
8	este urmat de	5	1 versare
12	este urmat de	5, 10, 11, 9	4 versări
5	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
10	este urmat de	9	1 versare
11	este urmat de	9	1 versare
15	este urmat de	9, 13, 14	3 versări
9	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
13	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
14	nu contribuie	cu inversare	nicio inversări
	Număr total de inversări		12

Numărul total, 12, este par, motiv pentru care această permutare particulară se numeşte o *permutare pară.* Similar, dacă numărul de inversări este impar, vorbim de o *permutare impară.* Câteva exerciţii vă vor convinge că, prin construcţie, permutările ce pot fi realizate cu jucăria lui Lloyd sunt întotdeauna pare atâta vreme cât începeţi cu ordinea naturală şi terminaţi lăsând colţul din dreapta jos gol. Fiindcă inversarea a numai o pereche de numere, 14 şi 15, are drept rezultat o permutare impară (1 inversare), oricât v-aţi strădui, nu veţi putea niciodată ajunge să obţineţi ordinea naturală. Lloyd era asigurat că nu va fi nevoit să plătească premiul oferit.

Dacă acest joc v-a stârnit intru cumva interesul şi se întâmplă să fiţi în posesia unei jucării concepute de Lloyd, poate că doriţi să încercaţi următorul lucru: Credeţi că, pornind de la o configuraţie iniţială ce are piesele 14 şi 15 inversate (figura 74 b), puteţi ajunge la ordinea naturală dacă pătratul gol din configuraţia finală este colţul din stânga sus (ca în figura 74 c)? Răspunsul este prezentat în Anexa 9.

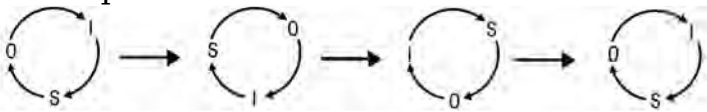
Cam la un secol după apariţia puzzle-ului lui Lloyd, arhitectul maghiar Ernő Rubik a venit cu o jucărie şi mai sofisticată, extrem de populară. Cubul Rubik (figura 75) constă dintr-o matrice 3 X 3 X 3 de cuburi mai mici. Feţele cuburilor mici sunt colorate diferit, iar feţele cubului mare sunt fixate pe pivoţi, astfel încât să se poată roti în diferite direcţii. Obiectivul jocului este cel de a da fiecărei feţe a cubului mare o singură culoare.

Rubik a inventat cubul în 19744 şi până în 1980 acesta a devenit o senzaţie internaţională. Vreme de circa trei ani, nebunia declanşată de Rubik a bântuit lumea. De la şcolari până la înalţii funcţionari din birouri luxoase, toţi încercau să rezolve cubul, într-un timp din ce în ce mai scurt. În onoarea inventatorului5, pe 5 iunie 1982, Budapesta a găzduit primul campionat mondial pentru cel mai rapid jucător. Acolo s-au prezentat campionii tuturor celor 19 concursuri naţionale organizate anterior.

Câştigătorul, Minh Thai, din Statele Unite, a obţinut un uluitor timp de 22, 95 secunde, deşi cuburile folosite în competiţie erau noi şi, de aceea, mai lente în rotaţiile lor decât unele mult utilizate. De atunci, s-au înregistrat şi performanţe mai bune. În momentul în care scriu, danezul Jess Bonde este posesorul recordului de timp realizat într-un campionat oficial – 16, 53 secunde! Chiar dacă am exclude nenumăratele imitaţii ale Cubului Rubik, un ameţitor număr de peste 200 de milioane de cuburi s-au vândut până la această dată în toată lumea.

Fiindcă există nu mai puţin de 43.252.003.274.489.856.000 de combinaţii diferite pe care le poate etala cubul, vă puteţi imagina că nimeni nu le-a încercat pe toate pentru a rezolva problema. În schimb, fiecare mişcare a Cubului Rubik poate fi reprezentată ca o permutare a vârfurilor sale. Într-adevăr, soluţia problemei cubului6 poate fi integral descrisă în limbajul teoriei grupurilor. Matematicianul David Joyner7 de la U.S. Naval Academy a sistematizat chiar şi un curs complet de teoria grupurilor în jurul Cubului Rubik şi a unor jocuri matematice similare.

Revenind acum la problema GALOIS-AGLISO prezentată la începutul acestei secţiuni, cum putem găsi ce permutare s-ar obţine după 1 327 de aplicări ale aceleiaşi transformări? Mai întâi, să observăm că operaţia lasă litera L neschimbată, în a treia poziţie. În al doilea rând, descoperim că literele O, I, S sunt permutate în aşa fel încât impresia este de mişcare „în jurul unui cerc” (ca în figura 76). Acest lucru este similar cu o tehnică practicată de regulă în baschet, în care jucătorii stau în şir indian şi, după ce aruncă la cos, fiecare revine la coada şirului. Permutările de acest tip se numesc *ciclice.* O importantă proprietate a lor este aceea că ele revin la ordinea originală după un număr fixat



de aplicări, numit *perioadă.* Figura 76 arată că permutarea ciclică a lui O, I, S este de *perioadă* 3 – ordinea OIS este restabilită după trei paşi. Ultimul punct de remarcat cu privire la operaţia GALOIS-AGLISO este că literele G şi A sunt transpuse, revenind la ordinea lor originală după fiecare două operaţii. Dacă punem la un loc toate aceste informaţii, descoperim un mod lesnicios de a rezolva problema. Fiindcă O, I, S revin la ordinea lor iniţială la fiecare trei paşi, iar G, A, la fiecare doi paşi (şi L rămâne neschimbat), revenim la cuvântul original GALOIS după fiecare 3 X 2 = 6 paşi (puteţi verifica acest lucru repetând substituţiile de şase ori). Numărul 1 327 este egal cu 6 X 221 + 1. Aceasta înseamnă că după cel de-al 1 326-lea (= 6 X 221) pas, literele formează cuvântul GALOIS, iar după încă un singur pas, acesta se schimbă în AGLISO – cuvântul final. O lecţie importantă este de învăţat de aici: *Analiza proprietăţilor permutării ne-a permis să prezicem cu precizie rezultatul final, fără a trebui să efectuăm experimentul.* Aceasta era filosofia pe care se baza şi teoria lui Galois. El a descoperit un mod ingenios de a determina dacă o ecuaţie este rezolvabilă, din examinarea proprietăţilor de simetrie ale permutărilor soluţiilor sale.

Exact aşa cum două amestecări consecutive ale unui pachet de cărţi de joc nu duc decât la o amestecare diferită, efectuarea unei permutări urmată de o alta are drept rezultat o a treia permutare. Drept consecinţă, permutările satisfac automat condiţia de închidere a grupurilor. Amintiţi-vă că *închiderea* înseamnă că aplicând legea de compoziţie pentru a compune două elemente ale grupului, obţinem un alt element al aceluiaşi grup. Spre exemplu, mulţimea tuturor numerelor pozitive (întregi, fracţionare şi iraţionale) formează un grup faţă de operaţia de înmulţire obişnuită. În particular, cerinţa de închidere este satisfăcută deoarece produsul dintre oricare două numere pozitive este, de asemenea, un număr pozitiv. Identificarea permutărilor drept instrumente matematice cruciale, demne de studiu, l-a adus deci pe Galois pe

drumul ce ducea spre formularea teoriei grupurilor.

Grupuri şi permutări

Permutările şi grupurile sunt intim legate între ele. De fapt, conceptul de grup s-a născut din studiul permutărilor. Pentru Galois, acesta nu era decât primul pas dintr-o serie de ingenioase invenţii şi idei, ce au pavat calea către strălucita sa demonstraţie.

Să reamintim pe scurt definiţia precisă a grupului, introdusă în capitolul 2. Un *grup* este format din elemente care trebuie să asculte de patru reguli ce ţin de legea de compoziţie. De exemplu, să luăm în considerare mulţimea tuturor deformărilor posibile ce pot fi efectuate asupra unei bucăţi de plastilină, operaţia fiind definită drept „urmat de". Regulile sunt după cum urmează. Prima, compunerea oricăror două elemente prin legea de compoziţie trebuie să ducă la obţinerea unui alt element (această proprietate se numeşte *închidere).* Evident, o deformare a plastilinei urmată de o a doua deformare generează, pur °i simplu, o altă deformare. A doua, operaţia trebuie să fie *asociativă,* ceea ce înseamnă că dacă se compun trei elemente ordonate, rezultatul nu depinde de care două dintre ele se compun mai întâi. Transformări succesive, cum sunt deformările unei bucăţi de plastilină, satisfac automat această regulă. A treia, grupul trebuie să conţină un „status-quo" sau un *element neutru,* care fiind compus cu oricare alt element lasă acel element neschimbat. Pentru bucata de plastilină, deformarea „nu face nimic" joacă acest rol. În sfârşit, pentru fiecare element al grupului, trebuie să existe un „aşa cum erai" sau un *element simetric,* astfel încât dacă se compune un element cu simetricul său, să rezulte elementul neutru. Pentru orice deformare a bucăţii de plastilină, există o contradeformare care o readuce la forma originală.

Să examinăm acum mulţimea tuturor permutărilor posibile8 ale numerelor 1, 2, 3:

123 (123 (123 (123 (123 (123!

123/ \231/ \312/ \132/ \321/ \213/

I ŞI S2 ti *t, 2 I3*

Aici, pentru a ne putea referi la ele, am notat cu un simbol fiecare dintre diferitele operaţii. Elementul neutru, care lasă ordinea numerelor identică, este notat cu *I.* Fiecare dintre operaţiile *t1, t2* şi *t.*, *transpune* sau schimbă între ele două dintre numere, lăsându-l pe al treilea pe loc. Cele două operaţii s1 şi s2 sunt ambele permutări *ciclice,* mişcând numerele în jurul unui cerc.

Să observăm acum ce se petrece dacă aplicăm succesiv două operaţii de permutare. Reamintesc că important este care număr îl înlocuieşte pe care, iar nu ordinea în care sunt ele scrise. Să luăm, spre exemplu, *t1* urmată de şi. Operaţia *t1* îl lasă pe 1 la locul lui, după care s1 îl schimbă pe 1 în 2. Rezultatul net este, de aceea, transformarea 1 2. În acelaşi timp, *t1* înlocuieşte 2 cu 3, după care s1 înlocuieşte 3 cu 1, producând rezultatul net 2 1. În sfârşit, 3 este transformat în 2 de operaţia t1 şi apoi înapoi în 3 de operaţia s1. Găsim că t1 urmată de s1 dă permutarea: care este tocmai operaţia t3. Cu alte cuvinte, dacă simbolul o desemnează operaţia „urmat de", găsim că s1° t1 = t3 (amintiţi-vă că operaţia aplicată prima este întotdeauna cea din dreapta).

„Tabla înmulţirii" completă pentru cele şase permutări ia forma:

O	*I*	*şi*	*S2*	*ti*	t2	¿3
I	*I*	*şi*	*S2*	*Îi*	*h*	*h*
s1	*şi*	*S2*	*I*	*h*	*h*	*h*
S2	*S2*	*I*	*S 1*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*h*	*I*	şi	*S2*
h	*h*	*h*	*h*	*S2*	*I*	*Şi*
h	*h*	*h*	*h*	*Şi*	S2	*I*

unde intrarea din, să spunem, rândul s2 şi coloana t3 dă rezultatul lui s2° t3, care este t1. La prima privire,

această tablă poate părea o harababură, dar o examinare mai atentă dezvăluie un important adevăr: *Mulţimea tuturor permutărilor a trei elemente formează un grup.* De fapt, acest enunţ este adevărat pentru permutările oricărui număr de elemente. Tabla demonstrează atât închiderea (compunerea oricăror două permutări de trei elemente dă altă permutare de trei elemente), cât şi faptul că fiecărei permutări îi corespunde una simetrică – una care anulează efectul celei dintâi. În acest caz, puteţi verifica faptul că şi s2 sunt simetrice – aplicând cele două transformări una după alta, se reface ordinea originală (şi° s2 = *I; s2*° şi = *I).* Analog, fiecare dintre operaţiile ti, t2, t3 este propriul său simetric. Adică, aplicând-o pe oricare dintre ele de două ori, se reface *statu-quo-ul* (ti° ti = I; t2° t2 = I; t3° t3 = I). Grupul tuturor celor *n*! permutări a *n* elemente diferite se notează de obicei cu în Numărul elementelor unui grup poartă denumirea de *ordinul* grupului. Ordinul grupului permutărilor a trei obiecte, S_3, spre exemplu, este 6, din cauză că există exact şase astfel de permutări.

De ce ne interesează dacă permutările formează grupuri sau nu? Nu numai din cauză că, din perspectiva istoriei, acestea au fost instrumentele matematice care au dat naştere pentru prima dată conceptului de grup, dar şi fiindcă aceste grupuri particulare sunt, într-un anume sens, în centrul teoriei gupurilor.

Pentru a demonstra rolul special al grupurilor de permutări, să analizăm din nou simetriile triunghiului echilateral. Ne amintim că erau şase astfel de simetrii care lasă triunghiul neschimbat, corespunzând elementului neutru, rotaţiei cu 120°, rotaţiei cu 240° şi reflexiei în raport cu trei axe (vezi figura 9, pagina 23. În Capitolul 2, am descoperit că mulţimea simetriilor oricărui obiect formează un grup. Fiindcă grupul simetriilor triunghiului are exact acelaşi număr de elemente ca şi grupul de permutări a trei obiecte – ambele sunt de ordin 6 – are sens să ne întrebăm dacă nu cumva există o legătură între aceste două grupuri. Dar ce face, în realitate, o rotaţie de 120° a triunghiului, în sens trigonometric (figura 77)? Ea

nu face altceva decât să ia vârful

A şi să-l mişte din poziţia 1 în poziţia 2. În acelaşi timp, ea mişcă vârful B din poziţia 2 în poziţia 3 şi vârful C din poziţia 3 în poziţia 1. Cu alte cuvinte, putem vedea această rotaţie ca fiind nimic altceva decât o permutare a poziţiilor 1, 2, 3 în raport cu vârfurile triunghiului ce se roteşte:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Analog, fiecare dintre celelalte cinci simetrii ale triunghiului corespunde uneia dintre celelalte permutări – *structura celor două grupuri este identică*! Aceasta stabileşte o neaşteptată şi intimă legătură între simetrii şi permutări, prin teoria grupurilor. Conştientizarea ei stă la baza unei importante teoreme demonstrate în 1878 de matematicianul englez Arthur Cayley (1821 – 1895). Enunţată în limbaj simplist, teorema face o afirmaţie remarcabilă: *Orice grup este turnat în acelaşi mulaj ca şi un grup de permutări.* Adică, în pofida imensei latitudini pe care definiţia grupurilor o permite, există întotdeauna un grup de permutări care, pentru toate scopurile practice, este identic cu orice grup. În jargon matematic, două grupuri care au aceeaşi structură sau aceeaşi „tablă a înmulţirii", ca în cazul grupului de permutări a trei elemente şi al grupului de simetrii ale triunghiului echilateral, se numesc *izomorfe.* Pentru a da un alt exemplu, să ne amintim din Capitolul 2 că grupul simetriilor corpului omenesc are două elemente – transformarea identică şi reflexia în raport cu un plan vertical (aceasta din urmă reprezentând simetria bilaterală). „Tabla înmulţirii" pentru acest grup faţă de operaţia „urmat de" (unde *I* şi *r* simbolizează transformarea identică, respectiv reflexia) ia forma (din cauză că aplicarea reflexiei de două ori reface figura originală):

	I	***r***
I	*I*	*r*

r	*r*	*I*

Să examinăm acum un grup simplu, compus din numerele 1 şi-l, faţă de operaţia de înmulţire obişnuită. Tabla înmulţirii (de data aceasta la propriu) pentru acest grup este:

X	1	— 1
1	1	— 1
— 1	— 1	1

Dacă analizaţi cele două table descoperiţi imediat că ele au exact aceeaşi structură odată ce faceţi corespondenţa *I* 1, *r* – 1. Grupul de simetrii ale figurii umane este *izomorf* cu acest grup multiplicativ cu două elemente.

În afară de conceptul fundamental de grupuri de permutări, mai există un instrument matematic ingenios de care Galois avea nevoie pentru a-i permite să abordeze demonstraţia problemei nerezolvabilităţii printr-o formulă a oricărei ecuaţii de grad cinci (sau mai mare). Acesta era conceptul de *subgrup.* Asemenea unor facţiuni ale partidelor politice care ocazional devin ele însele partide, anumite submulţimi de elemente ale unui grup pot satisface ele însele toate cele patru cerinţe, pentru a forma un grup (închidere, asociativitate, element neutru, element simetric). În acest caz, se spune că submulţimea formează un subgrup. De exemplu, permutările *I* şi *t3* de la pagina 189 formează un subgrup al grupului permutărilor de trei elemente S_3, deoarece *I*° t3 = t3 şi t3° t3 = *I* (vezi tabla înmulţirii de la pagina 190), ceea ce implică închidere şi înseamnă că atât t3, cât şi *I* au propriile lor simetrice. Dacă împărţim ordinul (numărul de elemente) grupului părinte (6 în cazul lui S_3) la ordinul subgrupului (2 pentru

subgrupul de mai sus), obţinem *factorul de compoziţie.* În exemplul de mai sus, *factorul de compoziţie* este 6: 2 = 3. Faptul că acesta este număr întreg nu e întâmplător. O importantă teoremă datorată lui Lagrange ne asigură că aşa se va întâmpla întotdeauna. Ordinul unui subgrup finit divide întotdeauna exact ordinul grupului. Nu veţi găsi niciodată că un grup de ordin 12 are un subgrup de ordin 5, 7 sau 8; el poate avea doar subgrupuri de ordin 2, 3, 4 sau 6.

Galois era acum în posesia tuturor elementelor de care simţea că are nevoie pentru demonstraţie, dar se cerea încă un uriaş salt imaginativ pentru a le corela, aşa încât să creeze un tablou coerent. Un nou capitol de istorie a matematicii era pe punctul să înceapă.

Strălucita demonstraţie a lui Galois

Într-o faimoasă caricatură semnată de Sidney Harris, se văd doi savanţi lângă o tablă acoperită cu ecuaţii. Unul arată spre cuvintele „APOI SE PETRECE UN MIRACOL” care sunt scrise între două ecuaţii complicate, iar legenda sună aşa: „Mă gândesc că ar trebui să fii mai explicit aici, la pasul doi”. Perspicacitatea lui Galois era de-a dreptul miraculoasă. În istoria ştiinţei, chiar şi realizarea marilor descoperiri poate fi, de obicei, explicată prin ceva ce plutea „în aer” la acea vreme. Acestea sunt idei cărora le venise timpul. Cei mai mulţi fizicieni vor fi de acord, spre exemplu, că dacă n-ar fi propus Einstein teoria sa a relativităţii restrânse, din care a rezultat faimoasa ecuaţie $E = mc^2$, mai devreme sau mai târziu altcineva ar fi ajuns la aceeaşi idee. O notabilă excepţie, unde nu plutea aproape nimic „în aer” – unde aceeaşi grandioasă viziune nu s-ar fi materializat probabil decât mult, mult mai târziu – este teoria einsteiniană a relativităţii generale. Ea spune că forţa gravitaţională nu face nimic altceva decât să reflecte geometria spaţiului şi a timpului. Corpurile masive deformează spaţiul-timp în jurul lor, exact aşa cum bilele grele de popice încovoaie pista. În mişcarea lor în jurul Soarelui, planetele urmează orbite curbate nu din cauza vreunei insondabile atracţii, ci din cauza acestei deformări.

Această idee a reprezentat o asemenea revoluţie în perceperea structurii universului, încât celebrul fizician american Richard Feynman (1918 – 1988) a spus odată: „Încă nu pot pricepe cum s-a gândit la asta”. Chiar şi astăzi, la nouăzeci de ani de la primul articol despre relativitatea generală, intuiţia lui Einstein mai produce uimire. (Voi reveni la relativitatea generală în Capitolul 7.)

Mulţi matematicieni sunt cuprinşi de un respect similar atunci când se gândesc la Galois. Joseph Rotman de la Universitatea din Illinois îmi spunea: „Inventarea grupurilor de către Galois a fost o lovitură de geniu. La urma urmelor, marele matematician Abel, care s-a ocupat în aceeaşi perioadă de problema rezolvabilităţii prin radicali, n-a ajuns la teoria grupurilor. Într-adevăr, doar Cauchy, la întoarcerea sa în Franţa, în anii 1840, părea să aprecieze realizările lui Galois, şi intensele studii de teoria grupurilor ale lui Cauchy sunt cele care au condus la utilizarea teoriei grupurilor în alte domenii ale matematicilor”. Algebristul Peter Neumann de la Universitatea Oxford adăuga: „Galois a dat dovadă de o extraordinară putere de pătrundere în priceperea grupurilor, luate separat, dar la fel de extraordinar a fost modul în care a înţeles cum ar putea ele îi utilizate în teoria ecuaţiilor – creând în cele din urmă ceea ce numim acum teoria lui Galois (care, în fond, este teoria modernă a ecuaţiilor)”.

Aşadar, cum şi-a demonstrat Galois ingenioasele afirmaţii? Deşi esenţa demonstraţiei sale este oarecum tehnică, ea ne pune la dispoziţie o atât de unică fereastră ce dă spre neîntrecută să creativitate, încât – hotărât lucru – merită efortul de a arunca o privire prin ea. Urmărirea paşilor logici ai acestei demonstraţii poate fi comparată cu străbaterea labirintului minţii lui Mozart în vreme ce-şi compunea una dintre simfonii.

Demonstraţia conţine trei componente cruciale10, toate marcate de originalitate şi de imaginaţie. Galois a început prin a arăta că orice ecuaţie are propriul ei „profil de simetrie” – un grup de permutări (acum numit grupul

lui Galois) care reprezintă proprietăţile de simetrie ale ecuaţiei. Importanţa acestui pas nu poate fi subliniată îndeajuns. Înaintea lui Galois, ecuaţiile erau clasificate numai după gradul lor: pătraţice, cubice, cuartice şi aşa mai departe. Galois a descoperit că simetria era o caracteristică mai importantă. Clasificarea ecuaţiilor după gradul lor este analogă cu gruparea blocurilor constructive de lemn dintr-o cutie de jucării conform cu dimensiunile lor. Clasificarea lui Galois după proprietăţile de simetrie este echivalentă cu conştientizarea faptului că forma acestor blocuri – rotundă, pătrată sau triunghiulară – este mai importantă. Concret, pentru o ecuaţie, grupul lui Galois este cel mai mare grup de permutări ale soluţiilor, presupuse drept existente, care lasă neschimbate valorile anumitor combinaţii ale acestor soluţii. Spre exemplu, să luăm grupul permutărilor a doua elemente. Acest grup este compus din doi membri – transformarea identică şi operaţia care schimbă între ele cele două elemente. Să examinăm acum ecuaţia pătraţică. Putem nota cele două soluţii ale sale, presupuse a exista, cu x1 şi *x2.* În mod clar, combinaţia care dă suma celor două soluţii11, x1 + x2, rămâne neschimbată sub influenţa ambilor membri ai grupului de permutări a doua obiecte. Transformarea identică lasă xi şi x2 intacte, iar schimbarea între ele a lui xi şi x2 nu face decât să transforme xi + x2 în x2 + xi, care are aceeaşi valoare. Pentru ecuaţii de grad n, ştim din teorema fundamentală a algebrei, a lui Gauss, că ele au *n* soluţii. Numărul maxim de permutări posibile ale celor *n* soluţii este *n*! iar grupul conţinând toate aceste permutări este grupul numit anterior *S*. Galois a reuşit să demonstreze că pentru orice grad n, se pot găsi întotdeauna ecuaţii pentru care grupul lui Galois este întregul *S*. Cu alte cuvinte, el a arătat că pentru orice grad există ecuaţii care posedă *simetria maximă posibilă.* Sunt ecuaţii de grad cinci, spre exemplu, pentru care grupul Galois este S_5.

Cea de-a doua componentă esenţială a demonstraţiei lui Galois era tot o inovaţie. După ce a introdus conceptul

de subgrup, el a dat acestui concept o nouă particularitate, definind un *subgrup normal.* Să luăm spre exemplu grupul de şase permutări a trei elemente, S_3. Puteţi verifica lesne că o submulţime compusă din trei operaţii *I,* şi, s2, (vezi pagina 189) formează un subgrup al lui S_3. Închiderea este garantată prin faptul (vezi tabla înmulţirii de pe pagina 190) că şi° şi = s2, s2° s2 = şi, iar şi s2 sunt fiecare inversul celuilalt (s1° s2 = I). Să notăm acest subgrup de trei membri cu T. Să presupunem acum că luăm orice membru al lui T, cum ar fi se şi-l „înmulţim" la stânga cu un membru al grupului părinte S_3, să spunem tp şi la dreapta cu elementul simetric al aceluiaşi membru (care se întâmplă să fie tot t1, fiindcă este propriul său simetric). Adică, construim secvenţa de operaţii t1° s1° t1. Utilizând „tabla înmulţirii" de la pagina 190, descoperim că s1° t1 = t3 şi că t1° t3 = s2. Cu alte cuvinte, *t1*° s1° *t1* = s2, iar s2 este el însuşi un membru al subgrupului *T.* Dacă orice membru al unui subgrup satisface această proprietate (că, înmulţindu-l la stânga cu un membru al grupului părinte şi la dreapta cu simetricul acestuia, dă un membru al subgrupului), subgrupul poartă atunci denumirea de *subgrup normal.* Puteţi verifica lesne că *T* este într-adevăr un subgrup normal al lui *Sy* De fapt, *T* este subgrupul normal *maximal* (de ordinul cel mai înalt) al lui S_3. În general, dacă un grup are subgrupuri normale (altele decât grupul însuşi), unul dintre acestea va fi cel mai mare. La rândul său, acest subgrup maximal poate avea el însuşi, drept descendenţi, nişte subgrupuri normale. Unul dintre acestea va fi de ordinul cel mai înalt. În felul acesta, se poate întocmi o întreagă genealogie de subgrupuri normale maximale. Putem utiliza arborele familiei acestor subgrupuri pentru a crea un şir de *factori de compoziţie* (ordinul grupului părinte împărţit la cel al subgrupului normal maximal). În cazul lui S_3 şi T, factorul de compoziţie este 6: 3 = 2. Singurul subgrup normal pe care îl are *T* este cel mai simplu, de fapt trivial, grup – cel compus doar din transformarea identică *I.* Acest grup este de ordinul 1. De aceea, factorul de compoziţie dintre *T* şi

subgrupul său normal este 3: 1 = 3. Ierarhia generaţiilor de grupuri S_3, *T* şi cel compus doar din *I* ne dă, ca atare, şirul de factori de compoziţie 2, 3.

Niciunde nu luminează geniul lui Galois mai strălucitor decât în pasul al treilea al demonstraţiei sale. Aici el a utilizat toate creaţiile imaginaţiei lui. Întrebarea pe care chiar şi marele Abel o lăsase deschisă – De ce este nevoie pentru ca o ecuaţie să fie rezolvabilă printr-o formulă? – era pe cale de a primi răspuns. Galois a arătat că, pentru a se bucura de luxul unei soluţii determinate pe baza unei formule, ecuaţiile trebuie să aibă un grup Galois de un tip foarte particular. Concret, el a spus că un grup este *rezolvabil* dacă fiecare dintre factorii de compoziţie generaţi de subgrupurile sale normale maximale era un număr prim (divizibil numai cu 1 şi cu el însuşi). Astfel a putut justifica pe deplin utilizarea termenului „rezolvabil" demonstrând că, *pentru ca o ecuaţie să fie rezolvabilă printr-o formulă, condiţia este ca grupul său Galois să fie rezolvabil.*

În esenţă, el a arătat că, dacă grupul Galois al unei ecuaţii este rezolvabil, procesul rezolvării ecuaţiei poate fi descompus în paşi mai simpli, fiecare implicând numai găsirea soluţiilor unor ecuaţii de grad mai mic.

Cum este utilizată teorema în practică? În cazul cubicei generale, spre exemplu, ecuaţia prezintă simetrie maximă dacă grupul său Galois este S_3 (grupul tuturor permutărilor celor trei soluţii). *S_3,* totuşi, este hotărât rezolvabil – după cum tocmai am văzut, ambii factori de compoziţie 2 şi 3 sunt numere prime. Drept urmare, cubica generală este rezolvabilă, după cum au arătat şi dal Ferro, Tartaglia şi Cardano. Pentru ecuaţia generală de gradul cinci, pe de altă parte, Galois a pornit într-un mod similar, demonstrând mai întâi că există ecuaţii pentru care grupul Galois este grupul permutărilor a 5 soluţii, S_5. Aici, totuşi, a venit poanta. Galois a demonstrat că S_5, ca grup, nu este rezolvabil (unul dintre factorii de compoziţie reiese a fi 60, care nu este număr prim). Ecuaţia de gradul cinci, de aceea, are soarta rea a grupului Galois. Aceasta a încheiat

demonstraţia că ecuaţia generală de gradul cinci (şi similar, orice ecuaţie generală de grad superior) nu este rezolvabilă printr-o formulă. Una dintre cele mai interesante probleme din istoria matematicii era, în sfârşit, pusă să se odihnească o dată pentru totdeauna. Pentru a realiza această sarcină herculeeană, totuşi, Galois trebuise nu numai să vină cu idei strălucite, ci şi să inventeze o întreagă nouă ramură a matematicilor şi să identifice simetria drept sursa celor mai esenţiale proprietăţi ale ecuaţiilor.

Concluzia definitivă asupra nerezolvabilităţii ecuaţiei de gradul cinci printr-o formulă poate părea a fi dezamăgitoare, dar la ce comori a condus această „dezamăgire”! Să ne amintim de povestea biblică a regelui Saul. Atunci când măgarii lui Kis, tatăl lui Saul, s-au rătăcit, Kis îi spuse fiului său: „Ia unul din băieţi cu tine; du-te şi caută măgarii”. Această căutare a măgarilor pierduţi l-a condus pe Saul la profetul Samuel, care l-a uns pe tânăr drept primul rege al Israelului. Căutarea unei soluţii pentru ecuaţia de gradul cinci l-a făcut pe Galois să dea naştere „supremei arte a abstracţiei matematice” – teoria grupurilor.

Jocul întâlnirilor

Deşi nu a fost inventată cu acest grandios scop în minte, teoria grupurilor a reieşit a fi limba „oficială” a simetriilor. Rolul proeminent pe care-l joacă permutările în teoria grupurilor poate părea, la prima privire, oarecum surprinzător. La urma urmelor, deşi suntem pe deplin conştienţi de simetrii, permutările nu ne izbesc ca fiind la fel de bătătoare la ochi în viaţa noastră de zi cu zi. Totuşi permutările se ivesc uneori, deşi pe furiş, chiar şi în cele mai neaşteptate locuri.

Să luăm în considerare o problemă importantă pentru toată lumea, a găsirii unui partener de căsnicie12. Tot avansând de la o întâlnire întâmplătoare la următoarea, fiecare caută un adevărat suflet geamăn. Dar cum ştie căutătorul dacă ea sau el este acela? Se poate (ca în filme) ca, atunci când daţi cu ochii de o anumită

persoană, să ştiţi imediat că, în întreaga lume, nu mai există nimeni altcineva pentru voi? Sau, pentru a utiliza cuvintele unuia dintre personajele din filmul *Serendipity,* când veţi înceta să căutaţi pe Dl/Dna Chiar-ce-mi-trebuie şi să vă mulţumiţi cu Dl/Dna suficient-de-bun (a) – pentru moment? Pentru a trata mai uşor această problemă de viaţă, e indicat să facem câteva ipoteze simplificatoare. Să presupunem că o persoană (fie ea de sex feminin sau masculin) întâlneşte la momentul potrivit pentru aşa ceva patru potenţiali parteneri (voi discuta mai târziu situaţii implicând un număr diferit de candidaţi). Să mai presupunem şi că, dacă ar putea să-i examineze pe toţi cei patru potenţiali parteneri, respectiva persoană ar fi în stare să-i clasifice de la cel mai neadecvat (notat cu 1) până la cel mai convenabil (notat cu 4), fără ca doi dintre ei să aibă exact acelaşi rang. De obicei, şansa nu îngăduie luxul de a-i întâlni simultan pe toţi cei patru parteneri. Mai mult decât atât, eticheta socială şi decenţa ne interzic să ne întoarcem la un candidat respins anterior. Ca atare, valurile vieţii îi poartă pe bărbaţi şi pe femei printr-o serie de întâlniri ce survin în ordine aleatorie. Drept consecinţă, pentru patru parteneri potenţiali, fiecare din următoarele 4! = 24 permutări ale ordinii întâlnirilor are aceeaşi probabilitate:

1 234	21 34	31 24	41 23
1 243	21 43	31 42	41 32
1 324	23 14	32 14	42 13
1 342	23 41	32 41	42 31
1 423	24 13	34 12	43 12
1 432	24 31	34 21	43 21

Secvenţa 3142, spre exemplu, înseamnă că se întâlneşte prima dată cu un candidat care merită nota 3 (bună, dar nu maximă), a doua oară – cu cel mai neadecvat dintre ei, a treia oară – cu cel mai potrivit, iar a patra oară – cu unul de nota 2 (proastă, dar nu minimă). În acest caz, aşteptarea ca Dl/Dna Chiarce-mi-trebuie să se arate ca ultim candidat, nu ar da cu certitudine rezultatul cel mai dorit. Într-adevăr, un proces prea tergiversat vă poate recompensa nesatisfăcător eforturile. Aşadar, ce ar trebui să facă tânăra (sau nu chiar atât de tânăra) persoană? Sau, mai specific, cum pot vânătorii de soţi (soţii) să-şi maximizeze şansele de a găsi cel mai bun partener?

Primul lucru de care trebuie să ne dăm seama este că există o strategie generală pentru abordarea unor astfel de probleme (clar simplificate). Dacă sunt 4 potenţiali parteneri, ideea este de a alege un număr, să-l numim k, cuprins între 1 şi 4. Apoi, după ce vom fi întâlnit şi cercetat k – 1 potenţiali parteneri, să optăm pentru primul care este mai bun decât toţi ceilalţi (sau, dacă niciunul nu este, să-l alegem pe ultimul). Spre exemplu, pentru $k = 2$, ideea ar fi de a ne uita cu atenţie la primul candidat ($k - 1 = 1$) şi de a-l alege apoi pe cel dintâi partener potenţial care este mai bun decât cel deja testat (nu uitaţi de presupunerea că nu se revine la un partener potenţial anterior). Logica acestei strategii este evidentă – ea se foloseşte, pe de o parte, de informaţia deja acumulată, pe de alta, de faptul că viitorul este necunoscut. Strategia generală nu vă spune, totuşi, ce valoare să alegeţi pentru k. Pentru a ne decide asupra ei, trebuie să găsim care valoare a lui k dă cea mai mare probabilitate de a alege cel mai bun candidat (notat cu 4). Pentru $k = 1$ ($k - 1 = 0$), spre exemplu, primul candidat este cel care sfârşeşte prin a fi ales. Pentru ca această alegere să fie cea mai bună, căutătorul se bazează pe cele şase permutări ale ordinii întâlnirilor în care 4 apare primul: 4321, 4312, 4231, 4213, 4132, 4123. Clar, probabilitatea de a nimeri una dintre aceste şase permutări din cele douăzeci şi patru de posibilităţi existente este de unu din patru. Acest lucru e lesne de

înţeles – căutătorul de partener nu l-a întâlnit încă pe niciunul dintre candidaţi şi există o şansă din patru de a-l găsi pe cel mai bun în acest prim rendez-vous. Acelaşi lucru este adevărat pentru $k = 4$. În acest caz ($k - 1 = 3$), se pariază pe şansa ca cel de-al patrulea şi ultim candidat să fie mai bun decât oricare dintre precedenţii trei. Situaţia corespunde permutărilor 3214, 3124, 2314, 2134, 1324, 1234, iar şansa ca ordinea întâlnirilor să se producă într-una dintre aceste şase modalităţi este tot una din patru. Pentru $k = 3$ ($k - 1 = 2$), căutătorul de soţ (soţie) întâlneşte doi dintre partenerii potenţiali, apoi îl alege pe primul care vine după ei şi este mai bun decât amândoi. Permutările ce vor rezulta pentru cea mai bună alegere (notată cu 4) sunt în acest caz: 3241, 3214, 3142, 3124, 2341, 2314, 2143, 1342, 1324, 1243. Spre exemplu, dacă ordinea întâlnirilor e 3241, căutătorul îi vede mai întâi pe candidaţii 3 şi 2, apoi, fiindcă numărul 4 este mai bun decât fiecare dintre cei doi, numărul 4 va fi cel ales. Dacă ordinea este 3214, cel de-al treilea candidat (notat cu 1) nu este mai bun decât primii doi, şi de aceea căutarea continuă şi conduce la numărul 4. Lista de mai sus (pentru $k = 3$) arată că, în acest caz, există zece permutări care conduc la cea mai bună alegere. Şansele de succes sunt, de aceea, de 10: 24 sau de circa 42%. În sfârşit, pentru $k = 2$ ($k - 1 = 1$), opţiunea va fi pentru cel dintâi candidat care este mai bun decât primul văzut. Puteţi verifica faptul că, în acest caz, permutările având drept rezultat „pescuirea cu plasa” a numărului 4 sunt: 3421, 3412, 3241, 3214, 3142, 3124, 2431, 2413, 2143, 1432, 1423. Spre exemplu, dacă ordinea este 3412, candidatul al doilea este deja mai bun decât primul, astfel încât acest candidat ar fi selectat. Pe de altă parte, dacă ordinea este 3214, căutătorul îi respinge pe candidaţii cunoscuţi la întâlnirile a doua şi a treia, fiindcă ei nu sunt mai buni decât primul, şi are de aşteptat ultimul partener potenţial pentru a-l găsi pe cel mai bun. Deoarece $k = 2$ oferă rezultatul dorit în 11 dintre cele 24 de ocazii sau o probabilitate de succes de circa 46%, aceasta este cea mai bună strategie de adoptat. Un

calcul similar arată că, pentru $k = 3$, cele mai mari şanse se obţin dacă numărul de parteneri potenţiali este de 5, 6, 7 sau 8. Dacă numărul de soţii/soţi potenţiali (e) este de 9 sau 10, vă veţi maximiza şansele cu $k = 4$.

Viaţa este, fireşte, mult mai complexă decât acest model suprasimplificat, mai ales dacă e vorba de iubire adevărată. Alegerea unui partener este o treabă mult prea serioasă pentru a fi redusă la simpla examinare a permutărilor. Cu toate acestea, apariţia permutărilor în situaţiile cele mai neaşteptate este reală. Strategia generală schiţată mai sus, fiindcă veni vorba, ar putea fi aplicată la multe alte circumstanţe (în special mai puţin critice), de la alegerea unei maşini de mâna a doua până la găsirea unui bun dentist de familie. Dacă numărul opţiunilor potenţiale este foarte mare (să spunem, mai mare de treizeci), se poate demonstra matematic că „regula lui 37%" produce cele mai bune şanse de succes. Adică, examinăm 37% din posibilităţi, apoi alegem maşina, restaurantul sau medicul de familie care este mai bun (a) decât tot ce am văzut mai înainte. (În cazul în care cititorii cu înclinaţii mai mari spre matematică se întreabă de unde vine un atât de straniu număr, ca acest 37%, pot spune că el este aproximativ egal cu 1: e, unde *e* este baza logaritmilor naturali.)

A

Împinse, nu amestecate

Găsirea dragostei vieţii cu ajutorul matematicii nu este singurul proces în care permutările sunt împinse în lumina rampei. Loteriile oferă, de obicei, asemenea situaţii, cazul cel mai dramatic fiind ilustrat de loteria recrutărilor din 1970, de pe vremea războiului din Vietnam.

Pe 26 noiembrie 1969, preşedintele Richard Nixon a semnat un ordin care instruia Serviciul Selectiv să stabilească un model aleatoriu de selecţie pentru înrolare. Ordinul stipula că loteria va fi bazată pe datele de naştere, dar nu furniza instrucţiuni specifice cu privire la metoda precisă de extragere a datelor.

Acesta nu era primul caz din istorie când o recrutare se baza pe un anume fel de loterie. Povestea biblică a judecătorului Ghedeon13 este deosebit de interesantă. Dumnezeu i-a spus mai întâi lui Ghedeon: „E prea mult popor cu tine; nu voi putea Eu să dau pe Madian în mâinile lor, ca să nu se mândrească Israel înaintea mea şi să nu zică: Mâna mea m-a izbăvit! De aceea, grăieşte în auzul poporului şi zi: Cine este fricos şi se teme, acela să se întoarcă şi să se ducă înapoi din Muntele Galaad”. Atunci Ghedeon a trimis acasă douăzeci şi două de mii de oameni, rămânând cu zece mii.

În a doua etapă a „loteriei”, Dumnezeu i-a impus lui Ghedeon un al doilea criteriu de selecţie. El i-a cerut lui Ghedeon să-şi ducă oamenii la apă, pentru a bea. Apoi i-a spus să-i aleagă numai acei trei sute care vor lipăi apa „cu limba din pumni” şi să le dea drumul celorlalţi, „care vor îngenunchea pentru a bea apă” direct, „aşa cum lipăie câinele”. E clar că „loteria” lui Ghedeon era departe de a fi o selecţie aleatorie – nu erau tratate în mod egal toate permutările posibile ale grupului de candidaţi. Au fost sugerate numeroase interpretări ale alegerii acestui al doilea criteriu. Cea mai simplă este aceea că ideea avea drept scop selectarea unui număr mic de oameni, spre a amplifica impresia miraculoasei victorii. Explicaţii mai elaborate leagă îngenuncherea de practici utilizate în cultul altor divinităţi sau de utilizarea mâinilor (în loc de a bea direct din râu) pentru a demonstra cumpătarea, nu lăcomia.

Destul de ciudat, deşi organizată mii de ani mai târziu, loteria de recrutare din 197014 a avut şi ea probleme din cauza caracterului aleatoriu.

Procedura în sine era suficient de simplă. Oficialii au introdus în capsule bucăţele de hârtie pliate, cu cele 366 de zile ale unui an (inclusiv 29 februarie). Pe 1 decembrie 1969, capsulele au fost extrase, una câte una, dintr-un bol. Fiecărui bărbat născut între 1944 şi 1948 îi era atribuit un număr de recrutare corespunzător ordinii în care ieşea data sa de naştere. Spre exemplu, prima dată extrasă a

fost 14 septembrie, tuturor bărbaţilor cu această dată de naştere atribuindu-li-se numărul 1. Bărbaţilor născuţi pe 8 iunie (ultima capsulă extrasă) li s-a atribuit numărul 366. În mod clar, fiecare extragere reprezintă o permutare a celor 366 de zile. Cu cât acest număr era mai mic, cu atât mai mari erau şansele ca acel bărbat să fie efectiv recrutat. Tabelul de mai jos arată numerele medii obţinute pe lună la loteria din 1970.

LUNA	NUMĂR MEDIU	LUNA	NUMĂR MEDIU
Ianuarie	201	Iulie	182
februarie	203	august	174
martie	226	septembrie	157
aprilie	204	octombrie	183
mai	208	noiembrie	149
Iunie	196	decembrie	122

Nu este nevoie să fii un statistician experimentat pentru a observa tendinţa clară a acestor numere. Dacă cele medii pentru lunile ianuarie-mai rămân destul de constante, există un marcat şi aproape staţionar declin al celor corespunzătoare lunilor iunie-decembrie. Noiembrie şi decembrie, în special, aveau numere medii considerabil mai mici decât acelea ale lunilor ianuarie-mai. Consecinţele erau tulburătoare – bărbaţii născuţi spre sfârşitul anului aveau şanse semnificativ mai mari de a fi recrutaţi într-un război greu.

În cazul unei distribuţii cu adevărat aleatorii, fiecare dintre posibilele ordonări ale datelor are o probabilitate egală de unu la 366 (!) – numărul de permutări posibile –, şi ne-am aştepta ca numărul mediu pentru diferitele luni să

fie aproximativ acelaşi, în jur de 183 sau 184. În loc de aceasta, datele arată că fiecare dintre primele şase luni avea un număr mediu mai mare, în vreme ce fiecare dintre ultimele şase luni avea un număr mediu mai mic. Statisticienii puteau demonstra că probabilitatea de apariţie într-un proces de selecţie cu adevărat aleatoriu a unei configuraţii ca cea prezentată în tabel era mai mică de 1 la 50.000. Cum s-a întâmplat să apară tocmai aceasta?

Descrierea procedurii prin care s-a efectuat extragerea furnizează câteva indicaţii importante:

Oamenii au numărat 31 de capsule şi au introdus în ele bucăţi de hârtie cu zilele lunii ianuarie. Capsulele lui ianuarie au fost apoi puse într-o mare ladă cubică de lemn şi împinse lateral cu un perete despărţitor de carton, lăsând goală o parte din ladă. Au urmat cele 29 de capsule corespunzătoare lui februarie, care au fost aruncate în porţiunea goală a lăzii, renumărate şi trase cu despărţitorul înspre capsulele lunii ianuarie, ele intercalându-se cu acestea. Deci, conform căpitanului Pascoe [şef al informaţiilor publice din cadrul Serviciului Selectiv], capsulele din ianuarie şi februarie erau amestecate temeinic. Acelaşi procedeu a fost aplicat cu fiecare lună următoare – capsulele erau numărate în zona goală a lăzii, apoi împinse cu separatorul între capsulele lunilor precedente. Deci, capsulele din ianuarie erau amestecate cu alte capsule de 11 ori, capsulele din februarie, de 10 ori şi aşa mai departe, capsulele din noiembrie fiind amestecate cu celelalte numai de două ori, iar cele din decembrie numai o dată… În văzul publicului, capsulele au fost lăsate să cadă din lada opacă în bolul adânc de şaizeci de centimetri. Odată ajunse în bol, capsulele nu erau agitate. Persoanele care le extrăgeau… în general luau unele de deasupra, deşi din când în când îşi mai întindeau mâinile şi până la mijlocul sau la fundul bolului.

Această relatare detaliată lasă puţină îndoială asupra concluziei că insuficienta amestecare, rezultată din

punerea capsulelor lună după lună, era vinovată de riscul nealeatoriu creat. Drept urmare a criticilor publice, procedura a fost corectată la loteria de recrutare din 1971. Desigur că, în practică, un caracter aleatoriu este mai dificil de obţinut decât s-ar crede. Să luăm, spre exemplu, cazul datului cu banul – cel mai cinstit lucru pe care l-au inventat oamenii pentru a decide aleatoriu între două opţiuni dificile. Probabilităţile de a ieşi capul sau pajura sunt egale, nu-i aşa? Nu tocmai. Un studiu recent realizat de statisticienii15 Persi Diaconis şi Susan Holmes de la Universitatea Stanford, împreună cu Richard Montgomery de la Universitatea din California, Santa Cruz, arată că, din pricina aruncării imperfecte (uneori este posibil ca moneda să nu se învârtească deloc), banul aterizează cel mai probabil pe aceeaşi faţă pe care era aşezat atunci când a pornit în zbor. Diferenţa dintre cele două posibilităţi nu e mare – o monedă va ateriza aşa cum a fost aruncată în circa 51% din cazuri –, dar arată că până şi astfel de lucruri simple nu pot fi acceptate fără probe. Nimeni nu este mai în măsură să examineze dacă ceva este sau nu aleatoriu decât Diaconis. El este statisticianul care a demonstrat că unui jucător de cărţi îi trebuie în medie nu mai puţin de şapte amestecări pentru a crea o ordine aleatorie în pachetul de cărţi. Totodată, Diaconis este cunoscut şi pentru că a demascat diverse fenomene „psihice”. Experimentele amănunţite pe care le-a făcut cu monedele arată că nu putem niciodată lua o decizie importantă pe baza unui penny, în special, care se roteşte pe cant, pe suprafaţa unei mese. Din cauza greutăţii suplimentare de pe faţa capului, astfel de monede, de un penny, aterizează cu pajura în sus mult mai frecvent decât cu capul.

Oricât de importante ar fi, totuşi, permutările în sine sunt departe de a constitui întreaga poveste atunci când vine vorba de teoria grupurilor – grupurile conduc în mult mai vaste domenii ale abstracţiei. În particular, dacă două probleme aparent distincte se caracterizează prin grupuri care sunt izomorfe unul cu altul (au aceeaşi structură),

aceasta este o indicaţie serioasă că cele două probleme pot fi mai strâns legate decât am fi bănuit.

Suprema artă a abstractizării

Într-o carte intitulată *Istoria naturală a comerţului* care a apărut în 1870, John Yeats scria: „Nicio doză de raţionare abstractă nu ne-ar fi condus la descoperirea proprietăţilor şi utilizărilor fierului”. Avea probabil dreptate. Şi totuşi, tocmai abstracţia este cea care le-a dat structurilor matematice flexibilitatea lor caracteristică. Ele pot fi transferate de la o disciplină la alta şi de la un mediu conceptual la altul.

Teorema lui Cayley – că orice grup, indiferent de elementele sale şi de legea de compoziţie căreia i se supun, este esenţialmente o copie la indigo a unui (este izomorf cu un) grup de permutări – pregăteşte terenul pentru înţelegerea grupurilor ca entităţi abstracte. Opera lui Cayley şi dezvoltările inovative ce i-au urmat datorită matematicienilor Camille Jordan, Felix Klein, Walter von Dyck şi ale altora au arătat că se poate începe cu orice grup, dezbrăcându-l apoi literalmente de majoritatea aspectelor sale particulare, până când nu mai rămân decât cele esenţiale. Acest schelet este suficient pentru oglindirea structurii şi a tuturor proprietăţilor importante ale grupurilor. O analogie care vine inevitabil în minte este aceea cu şcoala de artă a minimalismului, din secolul XX. Şi acolo, scopul unor artişti precum Carl André, Donald Judd sau Robert Morris era de a concentra atenţia asupra a ceea ce este fundamental şi de a reduce forma vizuală la extrema sa simplitate. Intenţia artistului conta în primul rând în aprecierea artei minimale – la fel cum contează şi cea a matematicienilor –, făcând ca aceasta să fie întotdeauna mai ales de ordin intelectual, şi prin urmare erudit, mai curând decât intuitiv.

Plecând de la grupurile de permutări (singurele grupuri cunoscute la acea vreme), Cayley a făcut un salt uriaş, formulându-şi primele intuiţii despre conceptul de grup abstract în 1854. Ca şi în cazul lui Galois, originalele sale idei erau însă atât de avansate pentru vremea aceea,

încât ele nu au atras deloc atenţia. Ca istoric şi critic cu educaţie matematică, Morris Kline a formulat odată această idee:

„Abstracţia prematură se izbeşte de urechi surde16, fie că ele aparţin matematicienilor sau studenţilor". În plan intelectual, Cayley (figura 78) ar putea fi privit, de aceea, drept unul dintre cei mai direcţi succesori ai lui Galois. Viaţa lui Cayley17, pe de altă parte, este în puternic contrast cu aceea a ghinionistului romantic francez.

Dascălii lui Arthur Cayley de la Colegiul Regal din Londra şi-au dat seama imediat de neobişnuitele sale talente matematice. Când şi-a continuat educaţia în Cambridge, examinatorul-sef al universităţii l-a clasat ca fiind „peste cel dintâi". Tânărul a trăit pe măsura aşteptărilor dascălilor săi; nu împlinise vârsta de 25 de ani când semnase deja două duzini de articole matematice. Prolificitatea lui generală nu-şi află perechea decât la Cauchy şi la Euler. Spre deosebire de violentele urcuşuri şi coborâşuri (mai mult coborâşuri!) din viaţa lui Galois, cea a lui Cayley s-a scurs fără hurducături şi a fost plină de succes. După pătrunzătoarele, deşi relativ neremarcatele, articole din 1854, el şi-a îndreptat atenţia spre alte importante teme matematice, dar s-a întors brusc la grupuri în 1878. Printr-o serie de patru articole fecunde, a determinat teoria grupurilor să înainteze spre însuşi centrul investigaţiei matematice. Într-adevăr, datorită realizărilor lui Cayley, n-a mai fost nevoie decât de încă alţi patru ani ca să apară definiţii abstracte, axiomatice ale grupurilor.

Savantul matematician James R. Newman scrie în monumentala sa compilaţie *Lumea matematicilor* că „Teoria Grupurilor este o ramură a matematicilor în care se face ceva la ceva, apoi se compară rezultatul cu rezultatul obţinut făcând acelaşi lucru la altceva sau altceva la acelaşi lucru". Un asemenea enunţ buimăcitor ar putea fi considerat cu greu drept o definiţie acceptabilă pentru un dicţionar, dar el surprinde perfect nivelul de abstracţie ce a devenit amprenta teoriei grupurilor.

Permiteţi-mi să utilizez câteva exemple nematematice pentru a explica acest concept.

Aceeaşi glumă poate fi reformulată diferit pentru contexte şi circumstanţe distincte. Un fizician care doreşte să-şi exprime dispreţul total pentru capacităţile intelectuale ale cuiva (nu că ei ar obişnui să facă aşa ceva…) ar putea spune: „Este atât de dens, că lumina se curbează în jurul lui”. Pe de altă parte, un om din generaţia Internetului ar putea utiliza, pentru acelaşi scop, imaginea „Nu cred că URL-ul său permite acces exterior”. Un consilier fiscal ar spune „Dacă s-ar pune taxe pe creiere, el ar obţine o rambursare”, iar un chimist ar putea alege cuvintele „Are un coeficient de inteligenţă aproximativ egal cu temperatura camerei”. Similar, enigma cu puterile lui şapte ce a apărut, la secole distanţă, în papirusul Ahmes, în cartea lui Fibonacci şi în culegerea de cântecele pentru copii *Mama Gâscă* (Capitolul 3), era esenţialmente aceeaşi, deşi exprimarea diferă. În sfârşit, s-ar putea argumenta că multe basme, ca „Albă ca zăpada” şi „Cenuşăreasa”, sunt în realitate identice, dar puse, fiecare în alt ambalaj: o mamă vitregă haină chinuieşte o viitoare prinţesă şi un prinţ chipeş o salvează pe jupâniţa năpăstuită. Grupurile permit o abstracţie similară. O structură de grup identică poate descrie nişte concepte aparent destul de disparate. Voi ilustra această putere unificatoare a grupurilor prin câteva exemple relativ simple.

Să începem cu patru operaţii18 ce pot fi efectuate asupra oricărei perechi de pantaloni. Notăm cu X operaţia „se întorc pantalonii cu spatele în faţă” (nu în timp ce-i purtaţi!). Y desemnează „întoarcerea pantalonilor pe dos”, Z spune că „se întorc pantalonii pe dos şi cu spatele în faţă”, iar I reprezintă transformarea identică, însemnând că nu se face nimic. Compunerea a doua operaţii (notată cu „°”) se realizează simplu, prin „urmat de”. Puteţi verifica lesne că aceste operaţii formează un grup. Mai exact, fiecare dintre operaţii este propriul său simetric: $X°X = I$ (întorcând de două ori pantalonii cu spatele în faţă se

reajunge la poziţia originală); *Y° Y = I* (întorcând de două ori pantalonii pe dos, aceştia vor arăta exact ca la început), iar din combinaţia a oricăror două operaţii rezultă a treia. Spre exemplu, *Z° Y* = X, deoarece „se întorc pantalonii pe dos” urmat de „se întorc pantalonii pe dos şi cu spatele în faţă” are drept rezultat „întoarcerea pantalonilor cu spatele în faţă”. „Tabla înmulţirii” pentru acest grup ia, de aceea, următoarea formă (nu uitaţi că intrarea corespunzătoare rândului *X* şi coloanei *Y* este *X° Y,* ceea ce înseamnă *Y* urmat de X):

°	***I***	***X***	***Y***	***Z***
I	*I*	*X*	*Y*	*Z*
X	*X*	*I*	*Z*	*Y*
Y	*Y*	*Z*	*I*	*X*
Z	*Z*	*Y*	*X*	*I*

Să considerăm acum o interesantă operaţie notată de obicei cu simbolul A, ce poate combina (într-un anume fel) oricare două mulţimi de elemente. Spre exemplu, dacă mulţimea *A* este compusă din pisici cu cel puţin câteva pete negre pe blăniţă, iar mulţimea B, din pisici cu cel puţin câteva pete albe pe blăniţă, atunci *A A B* ne dă mulţimea pisicilor care au fie pete negre, fie albe, dar nu de ambele tipuri. Grafic, dacă *A* şi *B* sunt reprezentate simbolic de ariile cercurilor din figura 79, atunci *A A B* corespunde suprafeţei haşurate – A reuneşte mulţimile, excluzând suprafaţa de suprapunere parţială. Să luăm acum în considerare alte patru mulţimi simple. Mulţimea *X* are numai un element: un pui de găină. Mulţimea *Y* are tot unul: o vacă. Mulţimea *Z* este compusă din două elemente: o vacă şi un pui de găină. *I* desemnează mulţimea vidă, care n-are absolut niciun element (rolul ei este similar cu cel jucat de zero în adunarea obişnuită). Să utilizăm acum operaţia A pentru a combina oricare două dintre aceste mulţimi. Spre exemplu, *X A Z* = Y, din cauză că mulţimea elementelor din *X* sau Z, dar nu din ambele, formează mulţimea compusă dintr-o vacă. Similar, *Y* A *I* = *Y*,

deoarece în *Y* există o vacă ce în mod clar nu este în mulţimea vidă I. De aceea, mulţimea *I* joacă rolul elementului neutru. Fiecare din X, Y, *Z* este propriul său simetric, din cauză că mulţimea elementelor care nu sunt şi în X, şi în *X* este în mod clar vidă: *X A X* = I. Puteţi verifica lesne că, asociind operaţia A mulţimilor X, Y, Z, I, obţinem un grup, a cărui tablă este:

A	***I***	***X***	***Y***	***Z***
I	*I*	*X*	*Y*	*Z*
X	*X*	*I*	*Z*	*Y*
Y	*Y*	*Z*	*I*	*X*
Z	*Z*	*Y*	*X*	*I*

Dar aceasta este exact aceeaşi tablă ca cea pe care tocmai am obţinut-o pentru transformările pantalonilor! Deşi atât membrii grupurilor din cele două cazuri, cât şi legile de compoziţie sunt complet diferite, cele două grupuri au o structură identică – ele sunt izomorfe. Ar putea fi aceasta doar o consecinţă a faptului că cele două grupuri alese sunt oarecum particulare? Pentru a ne convinge că nu este adevărat, să considerăm un foarte obişnuit grup de rotaţii. Pentru a vizualiza mai uşor transformările pe care ne pregătim să le efectuăm, este bine să utilizaţi un paralelipiped dreptunghic cu diferite motive pe feţele lui, cum ar fi o cutie de chibrituri sau o carte groasă. Să examinăm următoarele patru operaţii (figura 80):

X – o jumătate de rotaţie în jurul axei notate cu *x*.

Y – o jumătate de rotaţie în jurul axei notate cu y.

Z – o jumătate de rotaţie în jurul axei notate cu z.

I – transformarea identică, în urma căreia paralelipipedul rămâne „aşa cum este”.

Câteva exerciţii ne vor arăta că, efectuând, spre exemplu, *X* urmat de Y, obţinem acelaşi rezultat ca şi cum am fi efectuat operaţia Z.

În acelaşi timp, dacă se aplică de două ori oricare dintre operaţiile *X*, *Y*, *Z*, se reface configuraţia iniţială

(transformare identică). Tabla înmulţirii este la fel ca cele două precedente, acest grup geometric fiind deci izomorf cu grupul pantalonilor şi cu grupul „pui de găină-vacă”.

Poate că niciunde nu a fost aplicarea teoriei grupurilor mai surprinzătoare decât în domeniul antropologiei. Un extrem de complex sistem de rudenie-căsătorie 19 descoperit la Kariera, un trib de aborigeni australieni, i-a lăsat pe antropologi cu gura căscată. Fiecare *kariera* aparţine uneia dintre următoarele patru clase sau clanuri: Banaka, Karimera, Burung şi Palyeri.

Căsătoriile şi asocierea descendenţilor la diferitele clase ascultă de următoarele reguli stricte:

1. Un *banaka* se poate căsători numai cu un *burung.*

2. Un *karimera* se poate căsători numai cu un *palyeri.*

3. Copiii unui soţ *banaka* şi ai unei soţii *burung* sunt *palyeri.*

4. Copiii unui soţ *burung* şi ai unei soţii *banaka* sunt *karimera.*

5. Copiii unui soţ *karimera* şi ai unei soţii *palyeri* sunt *burung.*

6. Copiii unui soţ *palyeri* şi ai unei soţii *karimera* sunt *banaka.*

Uimit de neobişnuitul lor sistem, în anii ’40 ai secolului trecut, faimosul antropolog francez Claude Lévi-Strauss (n. 1908) i-a descris aceste reguli compatriotului său matematician André Weil (1906 – 1998), sperând că acesta din urmă va identifica vreun model călăuzitor. Weil era persoana perfectă căreia să i te adresezi. Pe lângă excepţionalele sale abilităţi matematice, el era obsedat de limbi şi de lingvistică. Pasiunea sa pentru sanscrită şi pentru cunoaşterea textelor antice, cum ar fi epopeea religioasă *Mahābhārata,* i-a favorizat chiar şi angajarea la Universitatea Aligarh Muslim din India. După ceva contemplaţie, Weil a putut, într-adevăr, să traducă întreaga schemă Kariera în limbajul teoriei grupurilor. Pentru a reproduce explicaţia sa, voi nota cele patru clase după cum urmează:

Banaka – A

Karimera – *B*
Burung – *C*
Palyeri – *D*

Regulile conjugale (1) şi (2) prezentate anterior – care spun, că un A se poate căsători numai cu un C (şi viceversa), iar un B se poate căsători numai cu un D – pot fi reprezentate prin următoarea corespondenţă de „familie”, notată cu f:

f /ABCD\ *f* \CDAB/

Observăm că, dacă această permutare se efectuează de două ori, ea reface ordinea originală – *f*° *f* *I* (unde *I* este identitatea: *f* îl duce pe *A* în locul lui C şi pe *C* în locul lui A, astfel încât aplicarea de două ori a lui *f* îl readuce pe *A* sub el însuşi, făcând acelaşi lucru şi pentru celelalte litere. Conform regulilor (3) – (6) ale descendenţilor, clasa copiilor poate fi determinată fie de strămoşii paterni (de exemplu, copilul unui bărbat *banaka* este întotdeauna un *palyeri)* sau de cei materni (de exemplu, copilul unei femei *banaka* este întotdeauna un *karimera).* Utilizând simbolurile pentru clase şi notaţiile *p* şi în pentru regulile paternă, respectiv, maternă, acest lucru poate fi exprimat prin două permutări:

ABCD\ = /ABCD!
DCBA/ în \BADC/

Să observăm din nou că *p*° *p* = *I* şi *m*° în = I. De asemenea, fiecare două permutări *f*, *p*, *m*, operând în succesiune, o produc pe cea de-a treia (de exemplu: *f*° *p* = m). Suntem acum în poziţia de a construi „tabla înmulţirii” completă pentru cele patru permutări *I, f, p* şi *m*:

O	***I***	***f***	p	***m***
I	***I***	*f*	*p*	*m*
f	*f*	***I***	*m*	*p*
p	*p*	*m*	***I***	*f*
m	*m*	p	*f*	***I***

Nu constatăm deci numai că regulile de rudenie-căsătorie Kariera formează un grup, dar o privire mai

atentă asupra tablei înmulţirii ne convinge că acest grup este izomorf cu grupurile pantaloni/pui de găină-vacă/rotaţii! De fapt, am putea considera că această tablă descrie orice grup abstract în care fiecare dintre cei trei membri *X, Y, Z* este propriul său simetric, iar combinaţia oricăror doi îl dă pe al treilea.

Incidental, ne putem întreba dacă aceste complexe reguli de înrudire Kariera au vreun echivalent în civilizaţia apuseană. Da, au. Să ne imaginăm două familii, Smith şi Jones. Membrii ambelor familii trăiesc în New York şi în Los Angeles. Pot fi atunci definite patru clase: membrii familiei Smith ce trăiesc în New York; membrii familiei Smith ce trăiesc în Los Angeles; membrii familiei Jones ce trăiesc în New York; membrii familiei Jones ce trăiesc în Los Angeles. Regulile ar putea fi formulate după cum urmează: un Smith se poate căsători numai cu un Jones (şi viceversa), iar un locuitor al New York-ului se poate căsători numai cu unul din Los Angeles (şi viceversa). Copiii trăiesc în locuinţa mamei, dar adoptă numele de familie al tatălui. Aceste reguli de înrudire (evident, născocite) produc exact aceeaşi structură ca acelea ale tribului Kariera.

În mod clar, nimeni nu-şi imaginează că această populaţie ar fi cunoscut teoria grupurilor. Este posibil ca descrierea pe baza acestei teorii a regulilor aplicate de ea în materie de căsătorie să nici nu fie în întregime necesară pentru cercetarea antropologică. Dar o analiză de acest tip a regulilor sociale poate dezvălui structuri subiacente care sunt, altminteri, dificil de recunoscut sau rămân chiar complet ignorate. „Curăţarea până la os" a grupurilor, indiferent de domeniul în care apar ele, este analogă, din mai multe puncte de vedere, cu analiza structurilor diferitelor limbi. Bunăoară, determinarea interconexiunilor dintre limbile indo-europene a fost realizată printr-un proces similar. Extinsele analize ale lui Claude Lévi-Strauss20 din domeniul antropologiei sociale, aşa cum sunt ele exprimate în *Structuri elementare de înrudire,* sunt, de aceea, recunoscute în general drept forţa motrice

din spatele structuralismului modern – căutarea unităţilor subiacente şi a regulilor ce guvernează modul în care sunt ele puse laolaltă.

Structuralismul şi-a derivat principiile organizatorice şi s-a inspirat din opera lingvistului elveţian Ferdinand de Saussure (1857 – 1913). Saussure a abandonat metoda tradiţională de abordare a limbilor, bazată în primul rând pe studii istorice şi filologice, în favoarea unei analize structurale. Un structuralist care examinează un aeroplan construit din piese de Lego nici nu se va sinchisi dacă modelul poate realmente zbura. Asemenea unui cercetător al teoriei grupurilor, el va recunoaşte că există diferite tipuri de blocuri constructive şi că aceste unităţi de bază sunt conectate între ele după anumite reguli. În lingvistică, unităţile de bază ar putea fi fonemele, adică cele mai mici unităţi sonore ale limbii (din care există 31 în engleză), iar regulile vor fi date de gramatica în conformitate cu care pot fi ordonate cuvintele. Fapt este că, utilizând doar un set limitat de reguli gramaticale şi o mulţime finită de foneme sau termeni, oamenii au fost în stare să producă lucrări impresionante, cum ar fi piesele de teatru ale lui Shakespeare, *Divina Comedie* a lui Dante şi *Encyclopedia Britannica.* Chiar şi copiii mici, care abia încep să meargă, pot pronunţa întregi fraze, pe care nimeni nu le-a mai exprimat vreodată. Atât uimitorul lor ritm de învăţare a limbilor, cât şi similitudinile proceselor de asimilare şi erorilor caracteristice ale tuturor copiilor de pe glob au motivat ideea unei gramatici universale21. Exact aşa cum principiile teoriei grupurilor stau la baza tuturor simetriilor, teoria gramaticii universale postulează că toate limbile au principii gramaticale subiacente, care sunt înnăscute la toate fiinţele umane. Într-un anumit sens, gramatica universală nu este o gramatică propriu-zisă, ci o stare iniţială a facultăţii vorbirii, pe care o posedă toţi oamenii. De remarcat că asta nu înseamnă că toate limbile22 au aceeaşi gramatică, ci doar că există nişte reguli de bază, comune şi invariabile. Idei de acest tip, parţial derivate din structuralism, au fost aplicate atât în

teoria lingvistică, cât şi în psihologia cognitivă de un influent cercetător de la MIT, Noam Chomsky. În Italia, romancierul şi filosoful Umberto Eco23 este şi el cunoscut pentru detaliatele sale analize structuraliste din domeniul interpretării semnelor (semioticii), în contexte sociale şi literare.

Date fiind paralelele dintre teoria grupurilor şi lingvistică, nu trebuie să ne surprindă faptul că, exact în perioada când Saussure revoluţiona lingvistica, matematicianul norvegian Axel Thue (1863 – 1922) introducea conceptul de limbaj formal – un set de cuvinte (sau de şiruri de caractere compuse dintr-un alfabet oarecare) ce poate fi descris printr-o anumită gramatică formală (un set de reguli precis definite). Un exemplu foarte simplu de limbaj formal ar putea fi dat de setul de şiruri compuse din literele *g* şi l. „Gramatica" ar putea fi definită, spre exemplu, prin regulile:

1. Se începe cu *g.*

2. De fiecare dată când se întâlneşte litera *g* într-un cuvânt, se înlocuieşte cu *gl.*

3. De fiecare dată când se întâlneşte litera *l* într-un cuvânt, se înlocuieşte cu *Ig.*

Putem verifica uşor că acest limbaj va include grupări de litere precum *g, gl, glig, gligiggl* şi aşa mai departe. Limbajele formale joacă un rol important în informatică şi în teoria complexităţii algoritmilor (care se ocupă cu complexitatea intrinsecă a instrucţiunilor date unui sistem de calcul). Faptul că noţiunile introduse de Thue amintesc de elementele şi definiţiile teoriei grupurilor nu este întâmplător. Cele două tematici sunt intim legate între ele, în special prin intermediul importantei *probleme a cuvântului*: Să se decidă dacă, utilizând înlocuiri permise de gramatică, orice două cuvinte pot fi transformate unul în altul.

La ce concluzie ne conduc toate aceste exemple? Grupurile pot atinge nivelul de abstractizare pe care-l asociem, în mod normal, numai cu numerele obişnuite. Dacă vorbim despre şapte samurai, şapte ani buni, şapte

zile ale săptămânii, şapte neveste pentru şapte fraţi sau şapte politicieni (de fapt, nu sunt sigur dacă cineva vrea să vorbească despre aceştia din urmă), toate sunt manifestări ale aceleiaşi entităţi abstracte – numărul şapte. Similar, cele patru grupuri pe care le-am întâlnit anterior (transformările pantalonilor, Kariera şi aşa mai departe) sunt, toate, realizări particulare ale unuia şi aceluiaşi grup abstract. Imprevizibil, constituind un grup de permutări, regulile Kariera oferă o altă manifestare a teoremei lui Cayley – există, într-adevăr, un grup de permutări care este identic din punct de vedere structural cu celelalte trei grupuri.

Matematicienii se referă de obicei la grupurile care sunt izomorfe unul cu altul ca şi cum ar fi un singur grup. Grupul particular realizat de pantaloni şi de regulile Kariera se numeşte *cvadrigrupul lui Klein,* după matematicianul german Felix Christian Klein (1849 – 1925). Klein are meritul de a fi realizat un progres major în aplicarea teoriei grupurilor – recunoaşterea faptului că geometria, simetria şi teoria grupurilor sunt inevitabil legate între ele. Klein a arătat că, în multe privinţe, geometria *este* chiar teoria grupurilor. Această afirmaţie surprinzătoare a produs o ruptură atât de impresionantă de modul tradiţional de a vedea geometria, încât merită o expunere mai detaliată.

Ce este geometria?

Cam prin anul 300 î.Hr., matematicianul grec Euclid din Alexandria a publicat ceea ce avea să devină cel mai bine vândut manual de matematică din toate timpurile – *Elementele.* Prin acest op de treisprezece volume, el a pus bazele geometriei euclidiene pe care o învăţăm la scoală, iar până în secolul al XIX-lea aceasta a fost singura geometrie cunoscută. Euclid a încercat să construiască întreaga teorie a geometriei pe o bază logică bine definită. Ca atare, a pornit cu numai cinci postulate sau *axiome,* considerate drept adevărate, şi a căutat să demonstreze toate celelalte propoziţii pe baza lor, prin deducţii logice. Axiomele sunt asemenea regulilor unui joc, al căror

„adevăr” nu se discută. Dacă dorim să schimbăm axiomele, nu facem decât să jucăm alt joc. Spre exemplu, prima axiomă spune: „Între oricare două puncte se poate trage o linie dreaptă”. Geometria euclidiană descrie propoziţii care sunt deduse a fi adevărate dacă această axiomă şi altele sunt adevărate. Axiomele a doua, a treia şi a patra erau la fel de concise, dar cea de a cincea era diferită, mai complicată ca formulare, şi drept urmare a avut o istorie mai complicată. Probabil că nici Euclid n-a fost pe deplin mulţumit cu cea de-a cincea axiomă a sa, căci a încercat să o evite cât a putut – demonstraţiile primelor 28 de propoziţii din *Elementele* nu fac uz de axioma a cincea. Versiunea foarte citată astăzi a acestei axiome, cunoscută sub denumirea de *axioma paralelelor,* îi aparţine matematicianului scoţian John Playfair (1748 – 1819), deşi ea a apărut mai întâi în comentariile matematicianului grec Proclus, în secolul al V-lea. Ea spune: „Date fiind o linie şi un punct care nu este pe linie, este posibil să se traseze numai o linie paralelă cu linia dată prin acel punct”.

Peste secole, mai mulţi geometri nemulţumiţi au încercat fără succes să demonstreze axioma a cincea folosindu-se de primele patru, într-un efort de a formula o geometrie mai economică. Acestea n-au fost eşecuri complete, totuşi, fiindcă au furnizat noi elemente de înţelegere a problemei. Mai exact, încercările lor au dus la înţelegerea faptului că erau posibile multe alte formulări alternative ale axiomei a cincea, toate echivalente între ele. În cele din urmă, această întortocheată cale a deschis drumul pentru dezvoltarea unor noi geometrii, neeuclidiene.

Cel dintâi care a făcut un progres semnificativ în direcţia geometriilor neeuclidiene, deşi nu l-a definitivat, a fost iezuitul Giovanni Girolamo Saccheri24 (1667 – 1733). Într-o lucrare destul de remarcabilă pentru vremea sa, *Euclides ab omni naervo vindicatus (Euclid eliberat de toate cususrurile),* Saccheri examina o interesantă întrebare, de genul „ce se-ntâmplă dacă?” – ce se întâmplă

dacă suma unghiurilor unui triunghi nu este egală cu 180° (aşa cum ne învaţă geometria euclidiană), ci este mai mare sau mai mică? Mai putem inventa oare o geometrie logică suficient de corectă, care să nu se contrazică pe ea însăşi? Cam un secol mai târziu, Legendre a preluat problema de acolo unde o lăsase Saccheri, arătând în faimoasa sa carte de geometrie (cea studiată de Galois) că afirmaţia potrivit căreia suma unghiurilor este egală cu 180° e complet echivalentă cu axioma a cincea a lui Euclid (adică o putem presupune adevărată pe oricare dintre cele două şi o demonstrăm pe cealaltă). Atât Saccheri, cât şi Legendre n-au izbutit totuşi să priceapă toate implicaţiile acestor posibilităţi alternative şi au sfârşit prin a se împotmoli în contradicţii incorecte. Dar nu-i mai puţin adevărat că atât lucrările lor, cât şi cercetarea complementară a matematicianului alsacian Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) au ajutat la concentrarea atenţiei asupra „postulatului paralelelor", pe care în 1767 matematicianul francez Jean d'Alembert îl numea „scandalul geometriei elementare". Patru matematicieni din trei ţări – Gauss, Bolyai, Lobacevski şi Riemann – sunt cei care au reuşit, în cele din urmă, să formuleze corect primele geometrii neeuclidiene. De fapt, în aceste noi geometrii, postulatul al cincilea este înlocuit25 cu una dintre negaţiile sale: „Printr-un punct neaflat pe o linie, există fie mai multe linii paralele cu linia dată, fie nu există niciuna". Sau echivalent, suma unghiurilor dintr-un triunghi este fie mai mică de 180°, fie mai mare de 180°.

Nu e greu de vizualizat cum pot fi realizate astfel de geometrii. Să examinăm cele trei suprafeţe din figura 81. Geometria euclidiană este geometria spaţiului plat, de tipul celui întâlnit pe suprafaţa unei mese. În această geometrie, paralelele (presupuse a fi infinite) nu se întâlnesc niciodată, iar unghiurile oricărui triunghi au întotdeauna suma egală cu 180°. Pe suprafaţa unei sfere, cum ar fi cea a pământului, suma unghiurilor unui triunghi depăşeşte 180° (în cazul particular arătat în figură suma este de 270°). Geometria în formă de să este cunoscută

astăzi sub denumirea de *geometrie hiperbolică.* János Bolyai (1802 – 1860) 26, un tânăr matematician maghiar, a elaborat multe dintre aspectele acestei geometrii în 1824. Într-o scrisoare adresată tatălui său, matematicianul Farkas Bolyai, János nu-şi putea stăpâni bucuria pricinuită de descoperire: „Am creat o stranie lume nouă, din nimic". În 1831, exuberantul J anos a finalizat o descriere detaliată a noii sale geometrii. Fiindcă tatăl lui era gata să publice un masiv tratat *(Tentamen)* despre fundamentele geometriei, algebrei şi analizei, János şi-a pregătit manuscrisul în formatul unei anexe la cartea tatălui. O scrisoare de la Gauss, căruia lucrarea îi fusese trimisă pentru recenzare, a domolit rapid entuziasmul lui Bolyai. Gauss şi-a exprimat mai întâi admiraţia pentru ideile din studiu, dar n-a întârziat să-i precizeze că „întregul conţinut al lucrării... coincide aproape exact cu propriile mele meditaţii, care mi-au ocupat gândurile în ultimii treizeci sau treizeci şi cinci de ani". Deşi nu încape îndoială că Gauss anticipase, într-adevăr, multe

Figura 81

dintre rezultatele lui Bolyai, dacă nu chiar pe toate el nu le publicase niciodată (după cât se pare, de teamă că o geometrie atât de radical nouă va fi privită ca o erezie filosofică). Realizarea faptului că nu el era iniţiatorul ideii a avut un efect devastator asupra lui Bolyai. El s-a umplut de amărăciune, iar lucrărilor sale matematice ulterioare le lipseşte calitatea imaginativă a geometriei hiperbolice.

Necunoscut nici de Bolyai, nici de Gauss, matematicianul rus Nikolai Ivanovici Lobacevski27 (1792 – 1856) a publicat în 1829 un întreg tratat, anunţând geometria hiperbolică drept o alternativă a geometriei euclidiene. Deoarece lucrarea a apărut în obscurul

Mesager al Kazanului, ea a trecut însă aproape în întregime neobservată până în 1837, când o versiune franceză apărea în *Revista Crelle.* În 1868, italianul Eugenio Beltrami28 (1835 – 1900) a pus, în sfârşit, geometria Bolyai-Lobacevski pe picior de egalitate cu geometria euclidiană.

Georg Friedrich Bernhard Riemann29 (1826 – 1866), strălucitul student al lui Gauss, este cel dintâi care a discutat *geometria eliptică,* aşa cum o întâlnim în forma sa cea mai simplă pe suprafaţa unei sfere, într-o prelegere clasică ţinută pe 10 iunie 1854. Pentru mulţi matematicieni, studiul lui Riemann se află în fruntea listei celor mai bune zece lucrări ale tuturor timpurilor. Una dintre diferenţele-cheie dintre geometria eliptică şi cea euclidiană este aceea că pe suprafaţa unei sfere cea mai scurtă distanţă dintre două puncte nu este o linie dreaptă. În loc de aceasta, ea este un segment dintr-un cerc mare, al cărui centru coincide cu centrul sferei (aşa cum este cazul ecuatorului sau meridianelor terestre). Cursele aeriene de la Los Angeles la Londra profită de acest fapt şi nu urmează o traiectorie dreaptă pe hartă, ci una de forma unui arc de cerc, ce trece pe la nord de Los Angeles (figura 82). Puteţi verifica uşor că oricare două cercuri mari se întâlnesc în două puncte diametral opuse (de exemplu, două meridiane, care sunt paralele la ecuator, se întâlnesc la cei doi poli). Ca urmare, în această geometrie nu există linii paralele. Riemann a dus abstractele concepte neeuclidiene mult mai departe şi a introdus spaţii curbate în trei şi chiar mai multe dimensiuni. În unele dintre acestea, natura geometriei se poate schimba din loc în loc, fiind eliptică în unele regiuni şi hiperbolică în altele. O diferenţă crucială între lucrarea lui Riemann şi cercetările tuturor predecesorilor săi (inclusiv ale marelui Gauss) consta în schimbarea de perspectivă asupra subiectului studiat. Atunci când analiza o suprafaţă bidimensională curbată, Gauss o privea de parcă ar fi fost suprafaţa unui glob – dintr-un punct de vedere exterior, tridimensional. Riemann, pe de altă parte, examina suprafaţa aceluiaşi

glob din perspectiva unui punct pictat pe acea suprafaţă.

Geometriile neeuclidiene pot părea, la prima vedere, invenţii inutile, deşi ingenioase, ale unor minţi de matematicieni cu prea multă imaginaţie. Aşa cum vom vedea însă în capitolul următor, în chip neaşteptat, s-a dovedit că soluţiile ecuaţiilor lui Einstein, care descriu structura spaţiului şi timpului, reclamă exact clasele de geometrii descrise mai sus. Perspectiva lui Riemann, cea care rezultă din analizarea spaţiului curbat dintr-un punct al său, este fundamentul cosmologiei moderne – studiul universului ca un întreg. Dacă ne gândim un moment la ea, este absolut uimitoare. Întrebarea aparent nevinovată „Ce se-ntâmplă dacă?", pusă de Saccheri cu privire la al cincilea postulat al lui Euclid, a condus la inventarea unor geometrii care au furnizat instrumentele de care avea nevoie Einstein pentru a explica structura cosmică. Exact aşa cum teoria grupurilor, formulată de Galois, a devenit limbajul simetriilor, iar geometria neeuclidiană, limbajul cosmologilor, acest tip de „anticipare" matematică a nevoilor fizicienilor generaţiilor ulterioare s-a repetat de multe ori de-a lungul istoriei ştiinţei.

Generalizarea şi abstractizarea geometriei era o dezvoltare bine-venită, dar în anii 1870 proliferarea diferitelor ei forme părea total scăpată din mână. În plus faţă de geometriile neeuclidiene prezentate până acum, mai exista o colecţie pestriţă, compusă din *geometria proiectivă* (ce se ocupă cu proprietăţile figurilor geometrice proiectate pe anumite suprafeţe, ca atunci când imaginile de pe un film de celuloid sunt proiectate pe ecranul unui cinematograf), *geometria conformă* (care se ocupă cu restrângerea corpurilor într-un spaţiu mai mic, cu păstrarea unghiurilor), *geometria diferenţială* (studiul geometriei utilizând calculul infinitezimal) şi din multe altele. Dacă, aşa cum credea Platon, „Dumnezeu este geometru", care dintre aceste geometrii se bucură de aprobarea divină? Acesta a fost punctul în care Felix Klein, pe atunci în vârstă de 23 de ani (figura 83 îl arată la o vârstă mai avansată), a venit în ajutor cu o metodă bazată

pe teoria grupurilor şi, astfel, ordinea a început să se cristalizeze din haos.

Într-o prelegere fundamentală30, intitulată „Trecere în revistă comparativă a cercetărilor recente din geometrie" şi susţinută în 1872 la Universitatea din Erlangen, Klein a inversat cu îndrăzneală rolurile simetriei şi geometriei. Apelând la cuvintele sale: „Există transformări ale spaţiului care nu schimbă deloc proprietăţile geometrice ale figurilor. Prin natura lor, aceste proprietăţi sunt efectiv independente de poziţia ocupată în spaţiu de figura considerată, de dimensiunea sa absolută şi de orientarea sa". Înaintea lui Klein, matematicienii gândiseră în primul rând în termeni de obiecte geometrice, cum ar fi cercurile, triunghiurile sau solidele. În loc de aceasta, în aşa-numitul său Program de la Erlangen, Klein a susţinut că geometria în sine se caracterizează şi se defineşte nu prin obiecte, ci mai curând prin grupul transformărilor care le lasă invariante. Să luăm, de exemplu, grupul mişcărilor rigide – mişcările care păstrează distanţele şi unghiurile şi, drept urmare, formele. Fiindcă astfel de mişcări sunt pâinea şi untul geometriei euclidiene, aceasta poate fi definită drept geometria care rămâne invariantă sub toate transformările din grupul mişcărilor rigide. Un cerc de rază dată rămâne neschimbat oricum l-am roti. Două triunghiuri care se suprapun exact (care sunt subiectul atât de multor teoreme din geometria euclidiană şi o constantă sursă de dureri de cap pentru elevii de liceu) rămân congruente chiar dacă le translatăm, le rotim sau le reflectăm. Ideea radicală a lui Klein permitea însă existenţa unei mult mai largi varietăţi de geometrii. Alte transformări, care ar putea răsuci sau întinde obiectele, ar putea defini noi geometrii. Cu alte cuvinte, conceptul unificator de bază, care reprezintă coloana vertebrală a oricărei geometrii, este *grupul de simetrii.* Deşi fiecare dintre numeroasele tipuri de geometrie se poate baza pe un grup diferit de transformări, proiectul fundamental al tuturor este acelaşi. În geometria proiectivă, spre exemplu, distanţele nu sunt

în mod clar invariabile. Prototipul lui King Kong, folosit pentru varianta originală a filmului cu acelaşi nume, n-avea decât 45 cm înălţime, faţă de imaginea sa de pe ecran, de 15 m. De aceea, geometria proiectivă se caracterizează printr-un grup de transformări de simetrie diferit de acela al geometriei euclidiene (concepte ca „hexagonal" sau „eliptic" se păstrează în proiecţie). Potrivit lui Klein, ceea ce au matematicienii de făcut pentru a defini o geometrie este de a furniza un grup de transformări şi de a identifica ansamblul entităţilor ce rămân neschimbate după aplicarea lui. Aceste idei au fost extinse ulterior31 şi înzestrate cu mult mai multă profunzime de doi giganţi ai matematicii: specialistul norvegian în teoria grupurilor Sophus Lie (1842 – 1899) şi semeaţa figură a matematicilor sfârşitului de secol al XIX-lea – francezul Henri Poincaré (1854 – 1912).

Cu inovativul Program de la Erlangen al lui Klein, cu abstracţia grupurilor a lui Cayley, cu înclinaţia lui Lie către modul de gândire structuralist şi cu matematica atotcuprinzătoare ale lui Poincaré, începuse să devină clar că simetria şi teoria grupurilor asigură reazemul unei bune părţi a matematicii. De fapt, pentru Poincaré, „toată matematica era o chestiune de grupuri". Domenii ce anterior au părut a fi total neconexate, cum ar fi ecuaţiile algebrice, o multitudine de geometrii, până şi teoria numerelor (prin lucrările fecunde ale lui Euler şi Gauss), au devenit deodată unificate printr-o structură de bază. Deşi Klein era privit de către unii matematicieni (destul de aroganţi) din Berlin ai timpului său drept „un şarlatan fără merite reale", el mai avea un elegant rezultat în repertoriul său. Cu o lovitură de maestru dată în domeniul teoriei grupurilor, a combinat algebra cu geometria, apoi s-a întors – credeţi sau nu – la lucrarea lui Galois asupra ecuaţiei de gradul cinci, făcând o legătură între ele şi aceasta din urmă. Spectacolul nu avea, totuşi, un singur actor: prusacul Leopold Kronecker32 şi francezul Charles Hermite33 au netezit drumul către aceste profunde interconexiuni.

Întoarcerea ecuaţiei de gradul cinci

Leopold Kronecker (1823 – 1891) a fost una dintre acele combinaţii cu adevărat rare de matematician dăruit şi afacerist de succes. Neobişnuita sa capacitate de a descoperi şi a ocroti imediat oameni aflaţi pe panta ascendentă, atât din lumea financiară, cât şi din cea matematică, s-a dovedit foarte utilă şi pentru promovarea propriei cariere. Unele dintre principalele sale contribuţii matematice au fost aduse în teoria funcţiilor eliptice (temă pe care Abel şi-a scris faimosul său studiu de 125 de pagini) şi în teoria *numerelor algebrice* (numere care sunt soluţii ale unor ecuaţii algebrice).

În 1845, unchiul lui Kronecker din partea mamei a decedat. Unchiul fusese un prosper bancher şi administrator de întreprindere agricolă. Conducerea afacerilor sale era aruncată pe umerii tânărului matematician, care pe data de 14 august a acelui an tocmai trecuse de examenul oral de susţinere a tezei de doctorat. Kronecker a preluat responsabilitatea cu multă energie şi o intransigentă seriozitate. Deşi solicitanta ocupaţie l-a forţat să-şi petreacă următorii opt ani ca afacerist, el nu a neglijat matematica. Acolo unde alţii aflaţi în situaţia sa s-ar fi putut apucat de un subiect mai uşor pentru a-şi ocupa timpul liber, Kronecker şi-a închinat eforturile pentru a dobândi cea mai profundă înţelegere a teoriei lui Galois dintre toţi matematicienii de pe la sfârşitul anilor 1840 (amintiţi-vă că memoriile lui Galois au fost publicate de Liouville, în 1846). Rezultatul a fost un memoriu de claritatea cristalului asupra rezolvabilităţii ecuaţiilor, apărut în 1853. În descrierea pe care o face lucrării, istoricul matematicilor E.T. Bell nu-şi precupeţeşte laudele: „Kronecker a luat aurul rafinat al predecesorilor săi, a trudit asupra lui ca un inspirat giuvaiergiu, a adăugat geme de la el şi a făcut, din materialul brut anterior, o lucrare de artă fără cusur, ce poartă amprenta neîndoielnică a individualităţii sale artistice”. Revenind complet la matematici, Kronecker şi-a petrecut următorii cinci ani montând un atac direct asupra

ecuaţiei de gradul cinci. După cum vă amintiţi, Abel şi Galois au demonstrat că ecuaţia generală de gradul cinci nu putea fi rezolvată *printr-o formulă* ce implică operaţii simple asupra coeficienţilor, nu că nu putea fi rezolvată deloc. Dar metoda concretă de rezolvare rămânea evazivă. Aşa cum este adesea cazul descoperirilor ştiinţifice ajunse la soroc, pe când Kronecker încerca să supună, în sfârşit, ecuaţia de gradul cinci, un matematician francez era şi el preocupat de acelaşi lucru.

Charles Hermite (1822 – 1901) era cel de-al şaselea copil al lui Ferdinand Hermite şi al Madeleinei Lallemand, care aveau cinci băieţi şi două fete. În copilăria lui Charles, fiindcă postăvăria familiei prospera, ai săi s-au mutat din Dieuze în Nancy, care era un oraş mai mare. După absolvirea unei şcoli din Nancy, urmată de Liceul Henri IV din Paris, Hermite a intrat la Louis-le-Grand, cam la unsprezece ani după ce Galois părăsise această instituţie. Dascălul său de matematici de acolo era – aţi ghicit – acelaşi Louis Richard, care fusese mentorul lui Galois. Înzestratul dascăl nu a întârziat nici de data aceasta să-şi dea seama că Hermite era „un tânăr Lagrange”. Dacă v-aţi îndoit vreodată că istoria are obiceiul să se repete, reţineţi ce vă spun acum. În vreme ce era la Louis-le-Grand, Hermite a publicat două studii matematice. Unul dintre ele era intitulat „Consideraţii asupra rezolvării algebrice a ecuaţiei de gradul cinci”. Foarte interesant, el demonstra că metoda lui Lagrange de rezolvare (Capitolul 3) nu putea funcţiona. Titlul şi conţinutul studiului au mai arătat, totuşi, că cel puţin la vârsta de douăzeci de ani Hermite nu ştia încă nimic de lucrările lui Abel sau ale lui Galois (nu că altcineva din lumea matematică ar mai fi ştiut ceva de lucrarea lui Galois la acea vreme). Pentru a mai continua puţin paralela dintre experienţele şcolare ale lui Hermite şi cele ale lui Galois, Hermite a încercat şi el să intre la École Polytechnique. Spre deosebire de sărmanul Evariste, a trecut examenul de admitere, dar a fost clasat tocmai pe locul 68. Apoi, pentru a adăuga o insultă la injurie, după

numai un an la Polytechnique, Hermite era forţat să plece din cauza unui handicap fizic – o infirmitate la piciorul drept.

Hermite s-a întors la ecuaţia de gradul cinci spre sfârşitul anilor 1850, iar studiul său asupra subiectului a apărut în 1858 – acelaşi an în care şi Kronecker a publicat unul, cu titlu practic identic: „Asupra rezolvării ecuaţiei generale de gradul cinci”. Rezultatul lui Hermite era spectaculos. Utilizând o specie particulară de funcţie eliptică, el era capabil, pentru prima oară, să rezolve ecuaţia generală de gradul cinci. Secole întregi de repetate asalturi îşi primeau, în sfârşit, răsplata.

Kronecker a făcut încă un pas înainte. Mai întâi, el a obţinut practic aceeaşi soluţie ca Hermite, dar utilizând o metodă diferită, mai în spiritul ideilor lui Galois. În al doilea rând, într-un alt articol, publicat în 1861, el a făcut săpături în motivele subiacente ale succesului metodei pe care o folosise. Cu alte cuvinte, Abel şi Galois au demonstrat că ecuaţia generală de gradul cinci nu putea fi rezolvată printr-o formulă; Kronecker a încercat să înţeleagă de ce putea fi rezolvată prin funcţii eliptice. O altă realizare a lui Kronecker a fost publicarea (în 1879) a unei versiuni mai simple, mai scurte şi mai bine organizate a demonstraţiei lui Abel. El a mai şi corectat o eroare minoră din demonstraţia originală, destul de lungă (care din fericire nu avea efect asupra rezultatului). Astfel a pregătit terenul pentru asaltul decisiv al lui Felix Klein.

Filosofia pe care se baza investigaţia lui Klein34 era, de fapt, destul de simplă. Mai spre începutul acestui capitol am utilizat proprietăţile familiare ale grupului de simetrii ale triunghiului echilateral şi pe acelea ale grupului de permutări a trei elemente pentru a arăta că cele două grupuri sunt, în realitate, unul şi acelaşi (izomorfe). Klein a răsturnat această logică. El a arătat mai întâi că două grupuri aparent disparate sunt izomorfe, apoi a încercat să priceapă care-s motivele acestei neaşteptate conexiuni. Descoperirile lui Klein au fost publicate în 1884, într-un tratat masiv, cu exoticul titlu *Prelegeri asupra*

icosaedrului şi a *rezolvării ecuaţiei de gradul cinci.* Cum sunt legate între ele cele două teme din titlu? Klein începea cu o simplă examinare a solidului denumit icosaedru (figura 84). Platon considera acest frumos corp drept unul dintre constituenţii de bază ai cosmosului (celelalte fiind tetraedrul, cubul, octaedrul şi dodecaedrul, toate formând *solidele platonice).* Icosaedrul are 12 vârfuri, 20 de feţe (fiecare de forma unui triunghi echilateral) şi 30 de muchii (liniile unde se întâlnesc feţele). Klein a arătat mai întâi că există exact 60 de rotaţii ce lasă icosaedrul neschimbat. Acestea sunt (figura 84): patru rotaţii cu multipli de 72° în jurul liniilor ce unesc vârfuri opuse (în număr total de 24); două rotaţii cu 120° în jurul liniilor ce unesc centrele feţelor opuse (în număr total de 20); jumătate de întoarceri în jurul liniilor ce unesc punctele mediane ale muchiilor opuse (în număr total de 15); transformarea identică, ce-l lasă „aşa cum e". Klein a arătat apoi că aceste rotaţii formează un grup. După aceea, el a examinat un grup particular de permutări de cinci soluţii ale ecuaţiei de gradul cinci, presupuse a exista. Mai concret, a examinat numai permutările pare (ce conţin un număr par de transpoziţii). Fiindcă sunt în total 5! = 120 de permutări a cinci elemente, există exact 60 de permutări pare (şi 60 impare).

Apoi a venit sah-matul. Klein a demonstrat că *grupul icosaedral şi grupul permutărilor sunt izomorfe.* Dar să ne amintim că demonstraţia lui Galois asupra rezolvabilităţii ecuaţiilor se baza în întregime pe clasificarea ecuaţiilor în funcţie de proprietăţile de simetrie demonstrate la permutarea soluţiilor. Neaşteptata legătură între permutări şi rotaţiile icosaedrale i-a permis lui Klein să

ţeasă o magnifică tapiserie, în care ecuaţia de gradul cinci, grupurile de rotaţie şi funcţiile eliptice erau toate întreţesute. Exact aşa cum îmbinarea tuturor pieselor unui joc de puzzle dezvăluie un întreg tablou, tot aşa şi interconexiunile fundamentale descoperite de Klein au procurat răspunsul definitiv la întrebarea de ce ecuaţia de gradul cinci putea fi rezolvată cu funcţii eliptice.

Puterea unificatoare a teoriei grupurilor era atât de copleşitoare, încât la sfârşitul secolului al XIX-lea devenise clar că sfera sa de influenţă avea să depăşească frontierele matematicii pure. Fizicienii, în special, începeau să ia aminte. În primul rând, prin teoria relativităţii generale a lui Einstein, geometria era recunoscută ca fiind o proprietate-cheie a universului în ansamblu. Apoi simetria era identificată drept fundamentul de unde izvorăsc în cele din urmă toate legile naturii. Aceste două simple adevăruri garantau că acea căutare a unei teorii atotcuprinzătoare a cosmosului se va transforma în mare măsură într-o căutare a grupurilor subiacente.

7

Regulile de simetrie

Natura a fost amabilă cu noi. Fiind guvernată de legi universale, nu de regulamente locale, ea ne-a dat ocazia să-i descifrăm grandiosul proiect. Spre deosebire de cum se desfăşoară lucrurile în afacerile imobiliare – unde totul se reduce la localizare, localizare şi iarăşi localizare – nici localizarea noastră în spaţiu, nici orientarea noastră în raport cu Pământul, Soarele sau stelele fixe nu face vreo diferenţă pentru legile naturii pe care le deducem. Dacă n-ar fi existat această simetrie a legilor naturii faţă de translaţii şi rotaţii, experimentele ştiinţifice ar fi trebuit repetate în orice nou laborator de pe glob, pierzându-se orice speranţă de a înţelege vreodată zonele îndepărtate ale universului. Lucrul acesta are implicaţii importante. Atunci când Newton a presupus pentru prima dată că mişcările corpurilor cereşti ar putea fi descrise prin formule matematice, şi mai mult decât atât, că formulele

respective exprimau legi universale, reacţiile declanşate în întreaga Europă sunt lesne de înţeles. Explicaţia căderii merelor nu ar fi fost de ajuns pentru a pricinui atâta senzaţie. Mişcarea planetelor, pe de altă parte, fusese întotdeauna considerată drept neîndoielnica lucrare a mâinii călăuzitoare a lui Dumnezeu. Poetul Alexander Pope din secolul al XVIII-lea a exprimat probabil sentimentele multora atunci când a scris:

Natura şi legile naturii} stau tainice în noapte:
Şi spuse Dumnezeu, Să fie Newton! Şi totul fu lumină.

Newton, el însuşi un om credincios şi evlavios, n-avea nicio intenţie să aducă în discuţie omniprezenţa lui Dumnezeu.

PHILOSOPHIÆ
*ţ-mi*0 & * r".*
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
W, *JS.* NEI – *rrov,* Tnk *C4L J* s-M*W *(cm*
PutríÜHF Lméfém, It Semait lugain ScdUU.
IMPRIMATUR
$. p t p v's, *K/g.* s", mi f's 11
JWM ţ. l**4.
lufe W «în ar T» po 77*" fWlwi Vn>
t ±*mmk*» *i*: a-i >pú Pnac<p» *ÎI* lolaanrfwk

Lumea din jurul nostru pare a fi la fel de trecătoare ca şi norii. Istoriile umanităţii, a Pământului, a Sistemului Solar, a întregii galaxii Calea Lactee şi chiar a universului luat ca un tot sunt marcate de schimbări neîncetate, uneori violente, deşi la scări de timp diferite. Din fericire, legile naturii sunt mai puţin efemere. Atunci când astronomii observă o galaxie care se află la un miliard de ani-lumină distanţă, lumina care intră în apertura telescopului lor în acel moment era pe drum de un miliard de ani. Cu alte cuvinte, telescoapele sunt adevărate maşini

ale timpului – ele dau crâmpeie de imagini din trecutul îndepărtat al universului. Pe cât putem spune, Mama Natură nu îngăduie amendamente la constituţia ei – legile naturii nu s-au schimbat în niciun fel observabil, cel puţin de pe vremea când universul avea vârsta de o secundă. Dacă legile ar fi avut o existenţă mai efemeră, fizicienilor (dacă aceştia ar mai fi existat în asemenea condiţii) le-ar fi fost foarte dificil să dezvăluie istoria cosmică.

Dimensiunile spaţiu-timp

Simetria legilor naturii se extinde mult dincolo de translaţii şi rotaţii. Legilor le este indiferent, spre exemplu, cât de repede sau în ce direcţie ne mişcăm. Puteţi observa acest fenomen în orice gară. Uneori, cu greu putem spune dacă trenul nostru se mişcă sau cel de pe linia alăturată. Doi observatori care se deplasează cu viteze constante (adică, fără schimbarea acceleraţiei sau direcţiei de mişcare) vor sesiza că natura ascultă de exact aceleaşi legi, indiferent dacă unul ţâşneşte spre cer, într-o rachetă a viitorului care zboară cu 99% din viteza luminii, iar celălalt stă tolănit pe spatele unei gigantice broaşte ţestoase. Galileo şi Newton îşi dăduseră seama de această importantă simetrie între observatori care se deplasează cu viteze constante, dar Einstein i-a dat o importanţă enormă şi o interpretare total neaşteptată în teoria relativităţii restrânse. O parte a acestei simetrii este relativ directă. Întrebarea „Când se opreşte New York-ul la acest tren?” poate părea suprarealistă, dar, de fapt, este perfect legitimă chiar şi în fizica newtoniană. O persoană aflată într-un tren, hotărât lucru, ar putea considera că acel tren stă pe loc în vreme ce orice altceva se mişcă. Einstein, totuşi, a formulat simetria astfel încât să corespundă cu neaşteptatul rezultat experimental, că viteza luminii este întotdeauna aceeaşi 3, indiferent de cum se mişcă sursa de lumină sau observatorul. Cu alte cuvinte, la simetria care spune că legile fizicii (inclusiv legile electromagnetismului şi luminii) par a fi aceleaşi pentru toţi observatorii care se deplasează uniform, el a adăugat o alta: *Viteza luminii este exact aceeaşi pentru toţi*

observatorii.

Constanţa vitezei absolute a luminii era un aspect implicit al ecuaţiilor lui Maxwell (teoria electromagnetismului), dar la prima vedere ea pare extrem de neintuitivă. De fapt, chiar ne contrariază, contrazicându-ne orice raţionament logic privitor la modul de comportament al obiectelor din jur. Atunci când cineva azvârle un măr în faţă în timp ce conduce un automobil decapotabil (din fericire, nu mulţi şoferi fac asta), viteza mărului în raport cu solul este suma dintre viteza automobilului şi viteza cu care este aruncat mărul. În acelaşi mod, ne-am aştepta ca, dacă acel vehicul ar veni direct spre noi, viteza luminii emise de farurile lui să fie egală cu suma dintre viteza luminii (de circa 300 de milioane de metri pe secundă) şi viteza automobilului. Einstein ne spune, totuşi, iar numeroase experimente o confirmă, că *nu* este adevărat. Chiar şi dacă automobilul s-ar deplasa cu incredibila viteză de 99, 99% din viteza luminii, viteza măsurată a luminii emise de farurile lui ar rămâne neschimbată, de 300 de milioane de metri pe secundă. Mai mult decât atât, acelaşi lucru ar fi adevărat dacă ar fi să măsurăm viteza luminii emise de stopurile automobilului, pe când acesta s-ar deplasa în marsarier, cu o viteză apropiată de cea a luminii. Înainte de a pătrunde mai adânc în implicaţiile acestei cruciale descoperiri, să examinăm pentru un moment ce s-ar fi întâmplat dacă vitezele surselor s-ar fi adunat la (sau scăzut din) viteza luminii. Figura 87 arată nişte piste încrucişate dintr-un aeroport. Avionul călătorind spre sud tocmai a aterizat în mare viteză. Exact când dă să intre în intersecţie, pilotul observă un transportor de bagaje apropiindu-se dinspre vest. Pilotul coteşte rapid pentru a evita coliziunea. Să presupunem acum că un observator priveşte întregul incident din ramificaţia de sud a intersecţiei. Pentru a face problema şi mai clară, să presupunem că avionul ce aterizează se mişcă foarte aproape de viteza luminii. Dacă viteza luminii n-ar fi constantă, observatorul ar vedea lumina reflectată de avion mişcându-se către el la aproape

dublul vitezei luminii (suma dintre viteza avionului şi cea a luminii). Lumina reflectată de lentul transportor de bagaje, pe de altă parte, s-ar apropia de observator la viteza luminii (fiindcă este reflectată perpendicular pe direcţia de mişcare). Drept consecinţă, lumina trimisă de avion ar ajunge la observator semnificativ mai devreme decât lumina de la transportor. Observatorul ar vedea avionul cotind violent fără niciun fel de motiv aparent. Deci luarea în considerare a unei viteze constante a luminii pentru toţi observatorii elimină astfel de paradoxuri, în care efectele precedă cauzele.

Ca să asigure simetria legilor fizicii pentru observatorii aflaţi în mişcare uniformă, precum şi invarianţa vitezei luminii, teoria relativităţii restrânse avea de plătit un preţ. Einstein a descoperit că spaţiul şi timpul nu pot fi tratate drept entităţi separate. Ele sunt inseparabil legate una de alta, prin simetrie. Articolul original al lui Einstein asupra relativităţii restrânse avea nepretenţiosul titlu „Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare” (figura 88 arată pagina de titlu), dar, aşa cum va arăta următorul exemplu, el ne-a schimbat literalmente percepţia realităţii.

Să ne imaginăm că, pe o perioadă de câţiva ani, înregistraţi pe bandă video un măr pus pe o masă, pe măsură ce mărul îmbătrâneşte şi se dezintegrează. Ceea ce acest (nu prea pasionant) film surprinde este „mişcarea” mărului prin timp, opusă mişcării sale prin spaţiu. Timpul, conform relativităţii restrânse, este cea de-a patra dimensiune, ce trebuie adăugată familiarelor

891

Magnetisierung usw.

Elektrodynamik bewegter Körper; von A. Einstein.

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der [illegible] Energie entspricht, die aber — Gleichheit der [illegible] ins Auge gefaßten Fällen

Figura 88

trei dimensiuni ale spaţiului. Atunci când mărul este propulsat cu o oarecare viteză, el călătoreşte în mod necesar prin toate cele patru dimensiuni, fiindcă pe măsură ce se deplasează prin spaţiu, şi timpul progresează. Va îmbătrâni mărul în mişcare în aceeaşi cadenţă ca un măr staţionar? Surprinzătorul răspuns al relativităţii restrânse este că nu. Cu cât se deplasează mai repede prin spaţiu, cu atât mai încet va ticăi „ceasul” mărului, văzut de un observator aflat în repaus. Atunci când viteza lui se apropie de cea a luminii, ritmul de scurgere a timpului său (pentru un observator aflat în repaus) va încetini până la un fel de târâre. Acest lucru ar părea incredibil dacă n-ar fi fost confirmat fără echivoc printr-o multitudine de experimente. Spre exemplu, în atmosfera superioară a pământului este produsă în mod constant o particulă elementară numită mezon, ca urmare a bombardamentelor particulelor de înaltă energie cunoscute drept raze cosmice. Faptul că aceşti mezoni pot călători prin zecile de kilometri ai atmosferei se datorează în întregime încetinirii relativiste a „ceasurilor” lor interne. În repaus, mezonii nu trăiesc decât circa două milionimi de secundă înainte de a se descompune în particule mai uşoare. Pentru nişte vieţi atât de scurte, chiar dacă particulele ar fi vâjâit prin spaţiu cu viteza luminii, timpul de călătorie prin atmosferă ar fi de peste

zece ori mai lung decât durata lor de viaţă (în absenţa efectelor relativiste). Cercetătorii care, în 1941, au cronometrat şi au numărat astfel de mezoni între vârful şi baza muntelui Washington din New Hampshire au confirmat că particulele călătoare de acest gen trăiesc mai mult4, exact aşa cum prezice relativitatea restrânsă. Experimente efectuate în 1975, în care mezonii erau accelerați până la 99, 94% din viteza luminii, au arătat că cei extrem de rapizi trăiesc de 29 de ori mai mult decât cei în stare de repaus, din nou în complet acord cu ceea ce era de aşteptat conform relativităţii restrânse.

În regulă, puteţi gândi, dar mezonii sunt nişte particule elementare bizare, nu ceasuri normale. S-ar încetini oare şi ceasurile noastre de mână sau bătăile inimii dacă ne-am deplasa cu viteze apropiate de viteza luminii? Ei bine, un experiment din 1971 a utilizat ceasuri adevărate. Fizicienii Joseph Carl Hafele şi Richard Keating5 au zburat în jurul globului în direcţii opuse, cu avioane comerciale Pan Am. Aveau la ei patru ceasuri atomice, care fuseseră sincronizate la începutul călătoriei cu un ceas staţionar din Washington, D.C. La sfârşitul călătoriei, ceasurile transportate spre est (cu viteză, ca atare, mai mare decât cea de rotaţie a pământului) au arătat, după cum era de aşteptat, un timp scurs mai scurt cu 59 de miliardimi de secundă, iar cele duse spre vest (efectiv mişcându-se mai încet decât ceasul din D.C.) au înregistrat timpi mai lungi cu 273 miliardimi de secundă.

Una dintre predicţiile-cheie ale relativităţii restrânse este aceea că rapiditățile de mişcare ale unui corp prin dimensiunile spaţiu şi timp se combină întotdeauna, pentru a da exact viteza luminii. Un mezon în repaus, spre exemplu, are întreaga sa „viteză” îndreptată în direcţia timp, fiindcă el nu „călătoreşte” decât prin dimensiunea timp. Pentru mezoni în mişcare, cu cât este mai mare componenta vitezei lor prin spaţiu, cu atât mai lent este procesul de „îmbătrânire”, timpul ajungând efectiv să se oprească în loc (pentru observatori în repaus) atunci când viteza mezonilor se apropie de viteza luminii. Lumina

însăşi călătoreşte întotdeauna prin spaţiul tridimensional exact cu viteza luminii. Relativitatea restrânsă ne spune că ea nu poate călători pe nicăieri cu o altă viteză şi nu este niciodată posibil să ajungi din urmă lumina – lumina nu poate fi niciodată în repaus. În acest sens, perceperea ei seamănă puţin cu perceperea mişcării într-un film. Fiecare cadru din film surprinde o scenă puţin diferită, iar atunci când aceste cadre sunt desfăşurate rapid şi succesiv pe dinaintea ochilor noştri, putem sesiza mişcarea. Atunci când filmul se opreşte, mişcarea încetează. Putem vedea lumină numai dacă ea se deplasează cu viteza luminii.

Destul de ciudat, în pofida incredibilei sale intuiţii şi profundei perspicacităţi din fizică, atitudinea lui Einstein faţă de matematica pură6 a fost la început destul de rece. Ca student în Zürich, nu prea buna frecvenţă la orele ţinute de matematicianul Hermann Minkowski (1864 – 1909) i-a adus porecla de „potaie leneşă”. Printr-o ironică întoarcere a istoriei, odată ce Einstein şi-a publicat teoria relativităţii restrânse, însuşi Minkowski a fost cel care a utilizat simetria pentru a pune această teorie pe o bază matematică solidă. Minkowski a arătat că spaţiul şi timpul pot fi „rotite” ca o entitate cvadridimensională, exact aşa cum poate fi rotită o sferă într-un spaţiu tridimensional. Mai important, în acelaşi fel în care o sferă este simetrică (adică nu se schimbă) dacă este rotită cu orice unghi în jurul oricărei axe, şi ecuaţiile relativităţii restrânse a lui Einstein sunt simetrice („covariante” în jargonul fizicii) faţă de rotaţiile spaţio-temporale. Această remarcabilă simetrie a ecuaţiilor a devenit cunoscută drept *covarianţa Lorentz,* după fizicianul olandez Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), cel dintâi care a descris aceste transformări, în 1904. Probabil că nu veţi fi prea surprinşi să aflaţi că ansamblul tuturor transformărilor de simetrie ale dimensiunilor spaţiu-timp Minkowski formează un grup, similar cu grupul rotaţiilor şi translaţiilor obişnuite, în trei dimensiuni. Acesta se numeşte *grupul Poincaré,* după excepţionalul matematician francez care a perfecţionat baza matematică a relativităţii restrânse.

Suspicios mai întâi („de când matematicienii au invadat teoria relativităţii, eu însumi nu o mai înţeleg”), Einstein începea încet să priceapă incredibila putere a simetriei. Dacă legile naturii trebuie să rămână neschimbate pentru observatori în mişcare, nu numai că ecuaţiile care le descriu trebuie să asculte de covarianţa Lorentz, *dar legile însele pot fi deduse din cerinţa de simetrie.* Această profundă realizare a inversat literalmente procesul logic pe care Einstein (şi mulţi dintre fizicienii care l-au urmat) îl folosea pentru a formula legile naturii. În loc de a porni de la informaţii furnizate de experimente şi observaţii asupra naturii, apoi de a formula o teorie şi a verifica dacă ea ascultă de unele principii de simetrie, Einstein a realizat că cerinţele de simetrie pot veni primele şi dicta legile cărora trebuie să li se supună natura. Permiteţi-mi să demonstrez acest tip de inversare intrare-ieşire, utilizând câteva analogii simple.

Să presupunem că n-aţi mai văzut niciodată un fulg de zăpadă, dar vi se cere să-i ghiciţi forma generală. Clar, fără cel puţin câteva informaţii iniţiale, nu puteţi spune nimic. Nici chiar desenul unui colţ al fulgului de zăpadă (figura 89) nu e de mare ajutor – nu puteţi ghici forma elefantului după coada sa. Acum, totuşi, vi se dau câteva indicii suplimentare – vi se spune că forma generală este simetrică la rotaţii de 60° în jurul centrului. Această indicaţie limitează imediat posibilităţile la fulgi de zăpadă cu 6 colţuri, 12 colţuri, 18 colţuri şi aşa mai departe. Fiindcă natura optează, de obicei, pentru soluţiile cele mai simple şi mai economice, fulgii de zăpadă cu 6 colţuri (ca în figura 90)

ar fi o excelentă ipoteză. Simetria impune constrângeri atât de rigide, încât teoria este călăuzită, aproape inevitabil, spre adevăr.

Ca un exemplu ceva mai complicat, să ne imaginăm că biologii dintr-un îndepărtat sistem solar investighează structura ADN a tuturor formelor de viaţă de pe planeta lor. După ani de muncă, ei descoperă că viaţa este întotdeauna bazată pe catene foarte lungi de ADN, care se

prezintă sub şapte forme diferite, ca cele din figura 91. O studiere atentă a diferitelor „motive” ale catenelor ne dezvăluie că fiecare dintre ele poate fi obţinută printr-o operaţie de simetrie sau printr-o combinaţie de operaţii de simetrie, asupra simbolului de bază b. Spre exemplu, prima catenă implică numai simetria de translaţie – motivul este pur şi simplu deplasat, în mod repetat. Cea de a doua catenă prezintă o *reflexie cu translaţie* care, după cum vă amintiţi (Capitolul 1), implică imagini oglindite care sunt translatate una în raport cu alta. Cea de a patra catenă se obţine prin translaţie şi reflexie în raport cu o linie de oglindire orizontală. La cel de-al şaselea motiv ADN se poate ajunge în mai multe moduri diferite – spre exemplu, prin translaţii succesive a patru simboluri sau prin reflexo-translaţii succesive ale unei perechi de simboluri reflectate. Într-o încercare de a-şi formula descoperirile în limbajul unei legi, biologii extratereştri ar putea conchide că toate catenele ADN sunt aranjate în motive simetrice faţă de diferite combinaţii de translaţii, rotaţii, reflexii şi reflexotranslaţii. Să presupunem, totuşi, că biologii (poate că după ce vor fi descoperit câteva catene) aveau ideea să înceapă de la ipoteza că fibrele ADN trebuie să asculte de unele simetrii. Ei puteau aborda apoi problema din capătul opus, cerând de la bun început ca fibrele ADN să fie simetrice. Clar, nu există niciun mod de a ghici motivul de bază – acesta ar fi putut arăta ca b, ca o stea sau ca răţoiul AFLAC. Totuşi, odată ce se descoperă motivul, se poate utiliza teoria grupurilor pentru a demonstra că există numai şapte modele distincte7 de catene ce pot fi formate utilizând combinaţiile celor patru simetrii de mai sus. Toate celelalte modele nu sunt decât variaţii ale celor şapte fundamentale. Cu alte cuvinte, cerinţele de simetrie în acest caz dictează fără echivoc numărul de modele existente. Matematicianul John Horton Conway, de la Universitatea Princeton, le-a dat nume amuzante celor şapte tipuri diferite de modele de catene. Ele corespund modelelor amprentelor de picior obţinute atunci când

fiecare acţiune se repetă: ţopăie într-un picior, păşeşte, sari, mergi pieziş, ţopăie rotindu-te, mergi pieziş rotindu-te, sari rotindu-te.

Simetriile legilor fizicii la translaţii, rotaţii şi mişcare uniformă (inclusiv invarianţa vitezei luminii) sunt absolut esenţiale pentru modul nostru de a înţelege spaţiul şi timpul, dar ele în sine nu impun existenţa a noi forţe sau a noi particule. După cum vom vedea în curând, totuşi, încercările de a înţelege gravitaţia şi de a unifica toate forţele de bază ale naturii au ridicat semnificaţia principiilor de simetrie la un şi mai înalt nivel – simetria a ajuns *sursa* forţelor.

O simetrie hotărâtoare

Splendoarea relativităţii restrânse a extins orizonturile simetriei legilor fizicii la toţi observatorii aflaţi în mişcare uniformă. Dar, vă puteţi întreba, ce se poate spune despre cei supuşi unei acceleraţii? În general, mai toate mişcările pe care le observăm în jurul nostru nu sunt uniforme – ele pornesc din repaus, ajung în repaus sau implică devieri, curbe ori rotaţii. Dacă legile electromagnetismului, să spunem, ar înceta să mai fie valabile sau ar fi, dar ar suferi nişte schimbări semnificative, în cazul unei rachete accelerând de pe rampa ei de lansare, n-am fi în stare să trimitem astronauţi în spaţiu. Einstein nu era pregătit să accepte o asemenea idee. Într-adevăr, de ce ar trebui să depindă legile de felul în care se mişcă observatorul? Mai mult decât atât, mişcarea accelerată este atât de răspândită – de la mişcarea planetelor în jurul Soarelui până la alergătorii de viteză de pe pistele stadioanelor –, încât orice teorie care nu abordează problema acceleraţiei este categoric incompletă. O altă deficienţă evidentă a relativităţii restrânse era faptul că teoria ignora total gravitaţia. Şi totuşi gravitaţia se manifestă pretutindeni, iar spre deosebire de electromagnetism, de ale cărui forţe ne putem feri, nu există niciun mijloc de a scăpa de gravitaţie. Unul dintre principalele scopuri ale lui Einstein a devenit, ca atare, extinderea sferei simetriei. În particular, el

simţea că legile naturii trebuie să fie aceleaşi nu numai pentru observatorii care se deplasează cu viteze constante, ci pentru toţi, indiferent dacă se află într-un laborator în care li se imprimă o acceleraţie de-a lungul unei linii drepte, în căluşei sau oriunde altundeva. Exact aşa cum biologii fictivi din subcapitolul precedent ar fi putut să înceapă cu principiul simetriei şi să deducă apoi din el cele şapte modele posibile de catene, şi Einstein dorea să pună simetria pe primul loc. Inspirat de covarianţa Lorentz a relativităţii restrânse (faptul că ecuaţiile nu se schimbă la rotaţii ale dimensiunilor spaţiu-timp), el cerea acum covarianţă generală, implicând o simetrie a legilor naturii – oricare ar fi acelea – la orice schimbare a coordonatelor spaţiului şi timpului. Aceasta nu era o cerinţă banală. La urma urmelor, cele circa un milion de răniri anuale produse numai în mijloacele de transport din Statele Unite demonstrează că oamenii simt acceleraţiile bruşte. De fiecare dată când virăm subit în altă direcţie, simţim cum corpul ne este împins lateral de forţa centrifugă, iar avioanele ce se ciocnesc de pungi de aer ne întorc stomacurile pe dos. În aparenţă, există o neîndoioasă distincţie între mişcarea uniformă şi cea accelerată. Atunci când ne urcăm într-un tren sau într-un lift care se deplasează cu viteză constantă, nu simţim mişcarea. Punctul nostru de vedere – că noi suntem în repaus, iar toate obiectele din jurul nostru se mişcă – este la fel de valabil ca acela al oamenilor care îşi flutură mâinile în semn de rămas-bun de pe un peron sau al acelora ce aşteaptă răbdători în foaierul hotelului. Atunci când obrajii unui astronaut sunt traşi cu forţă în jos la lansare, pe de altă parte, este clar că el simte acceleraţia. Aşadar, cum pot fi legile fizicii aceleaşi, chiar şi în sisteme de referinţă supuse acceleraţiei? Ce-i cu aceste forţe suplimentare? Găsirea soluţiei acestei enigme a reprezentat realizarea supremă a lui Einstein, ea solicitându-i ani întregi de muncă. Să încercăm să-i urmărim gândurile pe când căuta să stabilească simetria drept sursa tuturor legilor fizicii.

Să ne imaginăm viaţa într-un vagon de marfă supus

acceleraţiei (figura 92). Dacă vagonul de marfă accelerează constant spre dreapta, ştim din experienţa de fiecare zi că orice lucru va fi împins înapoi (spre stânga în figură).

Lampa atârnată de tavan, spre exemplu, va fi înclinată faţă de direcţia verticală. Orice obiect scăpat pe jos va cădea sub un anumit unghi, iar orice persoană aşezată pe un scaun, cu faţa în sensul de mers, va simţi o presiune exercitată de scaun, atât dinspre placa de sub ea, cât şi dinspre spătar. Acest lucru este foarte lesne de înţeles. Dacă cineva din vagon scapă cheile, viteza lor orizontală rămâne neschimbată (în afară de mici modificări produse de rezistenţa aerului), egală cu viteza pe care o aveau ele în momentul în care au căzut. În acelaşi timp, vagonul de marfă accelerează continuu, spre viteze tot mai mari. De aceea, cheile rămân în urmă, traiectoria lor de cădere fiind înclinată spre înapoi. Aici, totuşi, ne dăm seama de un lucru important. Experienţele persoanei din vagonul accelerat nu diferă de acelea pe care le-am avea dacă gravitaţia însăşi ar fi mai intensă şi ar fi înclinată, în loc să se îndrepte exact în jos. Cu alte cuvinte, forţa gravitaţională produce exact aceleaşi fenomene ca şi acelea observate în mişcare accelerată.

Să considerăm o altă situaţie. Atunci când stăm în picioare pe un cântar de baie aflat în interiorul unui lift care accelerează în sus, cântarul va înregistra o greutate mai mare (din cauză că picioarele noastre exercită o presiune sporită asupra sa) – ca şi cum gravitaţia ar deveni mai intensă. Un lift accelerând în jos ar crea senzaţia că gravitaţia este mai slabă. În situaţia extremă în care cablul liftului plesneşte, noi şi cântarul de baie am cădea liber la unison, iar cântarul ar înregistra greutate zero. (Dar aceasta nu este o metodă de slăbire, deoarece… gândiţi-vă ce ar înregistra cântarul atunci când liftul ar da în cele din urmă de fundul puţului!) Astronauţii plutesc „lipsiţi de greutate” în interiorul staţiei spaţiale nu din cauză că sunt în afara sferei de gravitaţie terestră, ci fiindcă atât staţia, cât şi persoanele din ea sunt supuse aceleiaşi acceleraţii

spre centrul Pământului – şi una, şi ceilalţi se află în cădere liberă.

Tot imaginându-şi diverse experimente de acest tip, Einstein a ajuns în cele din urmă, în 1907, la o concluzie extraordinară: *Forţa de gravitaţie şi forţa de acceleraţie*8 *sunt, de fapt, unul şi acelaşi lucru.* Această importantă unificare a căpătat denumirea de *principiul echivalenţei* – acceleraţia şi gravitaţia sunt două forme de manifestare ale aceleiaşi forţe; ele sunt echivalente. În interiorul unui lift aflat în cădere liberă este imposibil să spui dacă lipsa de greutate este cauzată de orientarea în jos a acceleraţiei liftului sau de gravitaţia miraculos „întreruptă". Einstein a descris momentul de iluminare divină pe care-l avusese în 1907 într-o prelegere susţinută la Kyōto, în 1922: „Şedeam în oficiul de brevete9 din Berna [Elveţia] când deodată mi-a venit un gând: dacă cineva cade liber, nu-şi simte propria greutate. Eram uluit. Acest gând simplu a făcut o impresie profundă asupra mea. El m-a împins spre o teorie a gravitaţiei". Laboratoarele medicale se folosesc permanent de principiul echivalenţei. Ele utilizează centrifuge pentru a învârti rapid diverse fluide, în scopul separării substanţelor cu densităţi diferite. Centrifugele acţionează ca nişte maşini producătoare de forţă gravitaţională artificială. Acceleraţia mişcării de rotaţie este echivalentă cu o creştere a forţei gravitaţionale.

O afirmaţie privitoare la caracterul atotcuprinzător al simetriei însoţea principiul echivalenţei – legile fizicii, aşa cum sunt ele exprimate de ecuaţiile relativităţii generale, sunt exact aceleaşi în toate sistemele, inclusiv în cele accelerate. Adică, legile sunt simetrice la orice schimbare a coordonatelor spaţio-temporale. De ce există atunci aparente diferenţe între ceea ce se observă, să zicem, dintr-un scrânciob şi într-un echipament de laborator aflat în repaus? Acestea, ne spune relativitatea generală, nu sunt decât diferenţe dictate de *mediul înconjurător,* nu ale legilor înseşi. În acelaşi mod în care, din cauza gravitaţiei, sensurile sus şi jos par diferite pe pământ (în pofida simetriei legilor la rotaţii), tot aşa şi observatorii din

scrânciob simt forţa centrifugă, care este echivalentă cu gravitaţia. Cu alte cuvinte, simetria tuturor sistemelor de referinţă, inclusiv a celor accelerate, *pretinde* existenţa gravitaţiei. Aşa cum ne-au arătat exemplele vagonului şi liftului aflate în mişcare accelerată, legile fizicii într-un sistem de referinţă supus acceleraţiei sunt de nedistins de acelea dintr-un sistem supus gravitaţiei.

Înarmat cu puternica înţelegere pe care i-o oferea principiul echivalenţei, Einstein simţea că era, în sfârşit, pregătit să atace cele mai interesante două întrebări pe care teoria gravitaţiei a lui Newton le lăsase total fără răspuns. Mai întâi şi înainte de toate era întrebarea de un milion de dolari „cum": Cum îşi face gravitaţia trucul? Sau, ca alternativă: Cum poate Soarele, care este la o distanţă de aproape 150 de milioane de kilometri de Pământ, să exercite o atracţie gravitaţională de neînvins, care menţine Pământul pe orbită?

Newton era perfect conştient10 de faptul că n-avea niciun răspuns:

Până acum am explicat fenomenele cerurilor şi ale mărilor noastre prin puterea gravitaţiei, *dar nu am atribuit încă nicio cauză acestei puteri* [subliniere adăugată]. Este absolut sigur că totul trebuie să purceadă de la o cauză ce pătrunde până în centrele Soarelui şi planetelor, fără a suferi nici cea mai mică diminuare a forţei sale… şi-şi propagă puterea în toate părţile, până la imense distanţe, descrescând întotdeauna cu inversul pătratului distanţelor… Dar până acum nu am fost în stare să deduc din fenomene cauza acestor proprietăţi ale gravitaţiei, iar eu nu formulez ipoteze.

În al doilea rând, exista un tulburător conflict între relativitatea restrânsă şi noţiunea de gravitaţie a lui Newton. În vreme ce prima afirmă hotărât că nicio masă, energie sau informaţie nu se poate propaga mai repede decât lumina, Newton privea gravitaţia ca exercitându-şi forţa instantaneu în vaste întinderi de spaţiu. O astfel de gravitaţie „rapidă" ar fi deschis uşa unor fenomene cu adevărat bizare şi nedorite. Spre exemplu, dacă Soarele ar

dispărea deodată, toate planetele din sistemul solar ar începe imediat să se mişte de-a lungul unor linii aproape drepte, fiindcă forţa care le menţine pe orbite eliptice s-ar anula. Totuşi, Soarele n-ar dispărea efectiv din vederea oamenilor de pe Pământ decât circa opt minute mai târziu, căci atât îi ia luminii pentru a străbate distanţa Soare-Pământ. Dacă ar exista locuitori pe Neptun, ei şi-ar începe călătoria în spaţiul rece cu peste patru ore înainte de a vedea Soarele dispărând. O asemenea răsturnare a cauzei şi efectului ar transforma percepţia noastră asupra realităţii într-un coşmar de neînţeles. Crezând ferm în corectitudinea relativităţii restrânse şi a principiului echivalenţei, Einstein şi-a dat seama că venise timpul pentru o revizuire completă a teoriei newtoniene a gravitaţiei.

El trebuie să fi avut primele indicii ale posibilităţii unui spaţiu-timp curbat în urma imaginării unui alt experiment interesant. Acesta a fost iniţial propus de fizicianul Paul Ehrenfest (1880 – 1933) şi a devenit ulterior cunoscut drept *paradoxul lui Ehrenfest*11. Unul dintre rezultatele cunoscute ale relativităţii restrânse este acela că lungimile corpurilor în mişcare, aşa cum sunt ele măsurate de observatori în repaus, se contractează pe direcţia mişcării. Contracţia este cu atât mai mare cu cât viteza este mai mare. Aceasta nu-i o iluzie – un băţ aflat în mişcare poate fi închis pentru moment într-un spaţiu care nu i-ar fi suficient în stare de repaus. Să considerăm atunci ce se întâmplă cu un obiect plat, ca un compact-disc, dacă se roteşte foarte repede. Fiindcă circumferinţa se roteşte mai repede decât interiorul, ea se va contracta mai mult. Drept urmare, discul se va deforma, căpătând o anumită curbură. Odată ce ideea de acceleraţie ca sursă a curbărilor era introdusă, Einstein nu s-a mai lipsit de ea. El a conchis că acceleraţia va curba însăşi structura spaţiu-timp. Iar dacă, potrivit principiului echivalenţei, acceleraţia poate face spaţiul să fie curbat, acelaşi lucru îl poate face şi gravitaţia. Aceasta a devenit esenţa relativităţii generale – *gravitaţia curbează şi îndoaie*

spaţiul-timp în acelaşi fel în care trapeziştii de la circ deformează plasa de siguranţă pe care aterizează. La fel cum obiectele grele arcuiesc mai pronunţat o trambulină, cu cât este mai mare masa unui corp, cu atât mai curbat devine spaţiul-timp în preajma sa. Calea pe care şi-o croieşte un automobil de teren prin dunele de nisip ale Saharei este determinată de forma terenului accidentat. Similar, traiectoriile planetelor în jurul Soarelui sunt determinate de curbura produsă de Soare în spaţiu-timp. Planetele nu fac decât să caute cea mai directă rută, iar formele orbitelor lor dezvăluie geometria curbată a spaţiului-timp. În sistemul de referinţă al unui spaţiu-timp curbat, influenţa gravitaţiei nu este categoric instantanee. Einstein a calculat că perturbaţiile pricinuite în forma spaţiului-timp se propagă asemenea undelor într-un iaz, *exact cu viteza luminii.* Dacă Soarele ar dispărea în chip miraculos, anularea influenţei sale gravitaţionale ar ajunge la Pământ în opt minute – simultan cu dispariţia sa vizuală. Acest mulţumitor rezultat elimina ultima problemă sâcâitoare a fizicii newtoniene.

Faptul că Einstein a transformat spaţiul-timp curbat în piatra de temelie a noii sale teorii cosmologice a creat necesitatea găsirii unor instrumente matematice care să descrie asemenea spaţii. Orele de matematică de la care chiulise în timpul şcolii au început să-l obsedeze. Din fericire, cel ce se arătase anterior atât de sceptic în privinţa matematicii avea pe cineva căruia să i se adreseze – Marcel Grossman (1878 – 1936), fost coleg de clasă cu Einstein, acum un matematician realizat. Pe un ton neajutorat ce nu-i era caracteristic12, Einstein s-a căit: „Am căpătat un mare respect pentru matematică, ale cărei cele mai subtile părţi le considerasem mai înainte drept pur lux!” Grossman s-a dovedit a fi demn de încrederea acordată. El i-a recomandat lui Einstein atât geometria neeuclidiană a lui Riemann, cât şi metodele matematice elaborate de matematicienii Elwin Christoffel, Gregorio Ricci-Curbastro şi Tullio Levi-Civita. Amintiţi-vă că Riemann „anticipase”, de fapt, exact instrumentul de care

avea nevoie Einstein – o geometrie a spaţiilor curbate, în orice număr de dimensiuni. Introducerea metodelor analizei matematice în geometrie, prin ramura numită *geometrie diferenţială,* şi dezvoltarea *calculului tensorial* au permis efectuarea unor determinări precise (tensorii sunt „cutii de numere" ce pot reprezenta spaţii de orice ordin dimensional). După câteva impasuri în care s-a aflat în anii 1912 – 1915, Einstein s-a hotărât să-şi urmeze principala lumină călăuzitoare – simetria tuturor elementelor implicate de principiul covarianţei generale. Intuiţia sa a dat roade şi, pe la sfârşitul lui 1915, a luat naştere relativitatea generală, o teorie atotcuprinzătoare a spaţiului-timp şi a gravitaţiei (figura 93 arată pagina de titlu a studiului). Într-o însemnare adresată fizicianului teoretician Arnold Sommerfeld, Einstein nu-şi putea ascunde exuberanţa: „Uită-te bine la ele [la ecuaţiile relativităţii generale]; sunt cea mai valoroasă descoperire a vieţii mele".

Einstein a fost primul care a recunoscut cât de mult datorează matematicii. Într-o conferinţă ţinută la Academia Prusacă de Ştiinţe13, în 1921, el declara: „Putem de fapt considera [geometria] drept cea mai veche ramură a fizicii… Fără ea, aş fi fost incapabil să formulez teoria relativităţii". Într-o prelegere din 1933, el adăuga: „Principiul creator [al ştiinţei] rezidă în matematică".

Aproape din ziua primei sale apariţii, simetria subiacentă şi simplitatea logică a relativităţii generale i-au adus mulţi admiratori între cei mai mari fizicieni ai timpului. Ernest Rutherford (cel care a descoperit nucleul atomic) şi Max Born (un pionier al mecanicii cuantice) i-au comparat mai târziu teoria cu o operă de artă.

Una dintre predicţiile-cheie ale relativităţii generale era curbarea razelor de lumină sub influenţa gravitaţiei. Mai exact, ea spunea că Soarele curbează lumina provenită de la stele poziţionate direct în spatele său. Pentru ca lumina solară să nu covârşească total lumina stelară, observaţiile trebuiau efectuate în timpul unei eclipse totale de Soare, atunci când Luna blochează lumina

Soarelui. Ideea de bază a experimentului era simplă: comparând o fotografie făcută în timpul eclipsei solare cu o alta, a aceluiaşi petic de cer, făcută atunci când lumina stelară este nedeviată, se putea încerca măsurarea micilor deplasări aparente ale poziţiilor stelare, cauzate de curbarea luminii.

Observaţiile, efectuate de două echipe britanice, au avut loc pe timpul eclipsei solare de pe 29 mai 1919, dar Einstein n-a primit confirmarea finală a rezultatelor până pe 22 septembrie. Cele două echipe, una dintre ele condusă de faimosul astrofizician britanic Arthur Eddington (1882 – 1944), au găsit o deflexie medie de 1, 79 secunde de arc, ceea ce corespundea perfect (în limitele erorilor experimentale aşteptate) cu predicţia relativităţii generale. Extrem de entuziasmat şi bucuros, Einstein s-a grăbit să-şi informeze mama. Confirmarea relativităţii generale a fost anunţată formal într-o şedinţă comună a Societăţii Regale şi a Societăţii Astronomice Regale din Londra, pe 6 noiembrie 1919, fiind pe drept declarată „una dintre cele mai mari realizări din istoria gândirii umane”. A doua zi, întreaga lume s-a trezit doar pentru a afla de o „Revoluţie în Ştiinţă” (figura 94 arată articolul publicat în *Times* pe 7 noiembrie 1919), iar Einstein era instantaneu propulsat până la neaşteptatul statut de stea a presei. Dar asta nu înseamnă că lumea a înţeles toate implicaţiile noii teorii. Potrivit unei populare anecdote, un

DEARER MONEY.
RISE IN BANK RATE.
CAUSES AND EFFECTS.

LABOUR DISPUTES COURTS.
SECOND READING OF THE BILL.
COMPULSION CLAUSES DROPPED.

COAL OUTPUT AND PRICE.
MINERS TO MEET MINISTERS.

REVOLUTION IN SCIENCE
NEW THEORY OF THE UNIVERSE.
NEWTONIAN IDEAS OVERTHROWN.

Figura 94

reporter l-a întrebat pe Eddington dacă realmente

teoria relativităţii este aşa de complicată încât, în afară de Einstein, numai doi alţi oameni din lume pot s-o înţeleagă cu adevărat. Eddington a rămas tăcut câteva minute. Reporterul l-a încurajat să nu fie prea modest, la care Eddington a replicat: „Deloc, încercam doar să-mi închipui cine este cealaltă persoană".

Chiar şi astăzi, mă simt copleşit de respect când mă gândesc la lanţul uimitor de idei şi de interconexiuni făcut ulterior. Călăuzit permanent de principiile simetriei, Einstein a arătat mai întâi că acceleraţia şi gravitaţia erau doar două faţete ale aceleiaşi medalii. El a extins apoi conceptul, pentru a demonstra că gravitaţia nu face decât să reflecte geometria spaţiului timp. Instrumentul pe care l-a utilizat pentru a elabora teoria era geometria neeuclidină a lui Riemann – exact cea utilizată de Felix Klein pentru a arăta că geometria, în general, este, de fapt, o manifestare a teoriei grupurilor (din cauză că orice geometrie se defineşte prin simetriile sale – obiectele pe care le lasă neschimbate). Nu e acesta un lucru uimitor?

Amintiţi-vă că Galois era destul de nesigur cu privire la aplicaţiile ideilor sale de teoria grupurilor. Puterile combinate ale imaginaţiilor unor matematicieni ca Lie, Klein, Riemann, Minkowski, Poincaré şi Hilbert „şi-au unit forţele" cu neîntrecută intuiţie fizică a lui Einstein, pentru a transforma simetria şi teoria grupurilor în cei mai de bază descriptori ai spaţiului-timp şi ai gravitaţiei.

În lumea cuantică

Oricât de importante sunt simetriile pentru legile ce descriu spaţiul-timp şi gravitaţia, rolul lor creste şi mai mult în domeniul particulelor subatomice. Spre deosebire de fizica noastră clasică, unde cuvântul *particulă* sugerează de obicei imaginea unui obiect de dimensiunile unei bile de biliard, în teoria cuantică – cadrul de lucru teoretic utilizat în fizica particulelor – particulele se pot comporta ca undele. Starea oricărui sistem şi evoluţia sa în timp sunt descrise de o entitate numită *funcţie de undă.* Funcţia de undă a unui electron este o undă de probabilitate, utilizată, spre exemplu, pentru a determina

probabilitatea de a găsi electronul într-o anumită poziţie, cu o direcţie de spin particulară. Fiindcă toţi electronii din univers sunt identici, singurul mod de a-i distinge unul de altul este prin energie, moment cinetic (produsul dintre masă şi viteză în fizica clasică) şi spin. Aceste mărimi de bază se definesc în mecanica cuantică prin răspunsul funcţiei de undă la diverse transformări de simetrie în spaţiu şi timp. Energia, spre exemplu, reflectă schimbarea ce rezultă în funcţia de undă prin modificarea coordonatei temporale14 (echivalentă cu resetarea ceasurilor). Să explicăm pe scurt acest concept. Să ne închipuim că doi fotografi surprind câte o imagine a undelor circulare ce se propagă din punctul de impact al unei pietricele aruncate într-un iaz. Bliţurile ambelor aparate de fotografiat sunt programate să se declanşeze exact la ora 8: 00 a.m. Totuşi, unul dintre cele două ceasuri care controlează bliţurile se întâmplă să fie în urmă cu o secundă. Aceasta înseamnă că, deşi cele două aparate de fotografiat vor înregistra aceeaşi undă, ele o vor surprinde în faze puţin diferite. Acolo unde o fotografie arată o creastă de undă, cealaltă poate arăta o vale şi viceversa. Mecanica cuantică defineşte energia unui sistem, cum ar fi electronul, prin schimbarea suferită de faza funcţiei sale de undă (măsurată în cicli de undă) din cauza diferenţei de o secundă dintre ceasuri. Similar, momentul electronului caracterizează schimbarea suferită de faza funcţiei de undă printr-o mică translaţie în spaţiu. Deşi aceste definiţii leagă proprietăţi fizice fundamentale de transformări de simetrie, ele sună, probabil, surprinzător de abstract. Oricine a învăţat ceva fizică la liceu îşi aminteşte că mărimi ca energia şi momentul cinetic sunt, în mod normal, asociate cu un concept destul de diferit – *legile de conservare.* Legile de conservare reflectă faptul că unele mărimi nu pot fi nici create, nici distruse – ele au aceleaşi valori fie că le măsurăm astăzi, mâine sau peste un milion de ani. Conservarea energiei este echivalentul fizic al vorbei „nu există prânz gratis”. Dacă am putea obţine energie din nimic, n-am plăti mai mult la pompele de

benzină de fiecare dată când producţia de petrol se micşorează. Conservarea momentului cinetic este familiară oricui a urmărit cum se ciocnesc bilele de biliard. Nu veţi vedea niciodată două bile rostogolindu-se înapoi (spre jucător) – momentul total al bilelor ricoşate trebuie să fie egal cu momentul bilei lovite cu tacul. Legile de conservare sunt pentru fizicieni micul dejun, masa de prânz şi cina. Cei specializaţi în particule elementare, bunăoară, utilizează acceleratoare uriaşe pentru a produce ciocniri între particule. Aceste acceleratoare sunt structuri gigantice (cel din Geneva, Elveţia, utilizează un tunel circular lung de 27 de kilometri), în care particulele subatomice sunt accelerate până la energii extrem de înalte. Scopul este de a testa forţele fundamentale pe distanţe din ce în ce mai mai scurte şi de a produce particulele mai grele a căror existenţă este prezisă teoretic. Experimentatorii profită de faptul că energia totală şi momentul cinetic total ale produselor de coliziune trebuie să fie exact egale (din cauza legilor de conservare) cu cele ale particulelor incidente şi ale particulelor-ţintă pentru a determina chiar şi proprietăţi ce nu pot fi detectate direct de aparatul experimental.

Aparent, de aceea, s-ar zice că avem două tipuri de definiţii, care nu sunt legate între ele. Pe de o parte, mărimile de bază, ca energia şi momentul cinetic, se definesc prin răspunsul funcţiei de undă la transformările de simetrie. Pe de alta, aceleaşi mărimi se asociază cu legile de conservare. Care este relaţia exactă dintre simetriile legilor fizicii şi legile de conservare? Neaşteptatul răspuns a fost dat de matematiciana germană Emmy Noether (1882 – 1935) şi îl cunoaştem de obicei sub denumirea de *teorema lui Noether*. Înainte de a explica acest rezultat, totuşi, vreau să descriu foarte pe scurt viaţa acestei extraordinare femei, pentru a arunca o oarecare lumină asupra tipului de dificultăţi de care s-a lovit ea într-o lume a matematicii dominată de bărbaţi.

Emmy Noether s-a născut în Germania, la Erlangen15, unde tatăl său era profesor de matematică.

Intenţia ei iniţială a fost să devină profesoară de franceză şi engleză, dar la vârsta de 18 ani s-a decis să studieze matematica. Acest lucru a reieşit că este mai uşor de zis decât de făcut. Deşi în Franţa femeilor li se permisese încă din 1861 să se înscrie la universităţi, acest lucru nu le era încă îngăduit oficial în conservatoarea Germanie a lui 1900. Senatul Universităţii din Erlangen declara în 1898 că admiterea studentelor „ar răsturna toată ordinea universitară". Cu toate acestea, Emmy a primit permisiunea specială de a participa la unele cursuri. După ce a trecut cu succes examenele organizate la Nürnberg, Göttingen şi Erlangen – şi graţie schimbărilor lente, dar treptate în atitudinea diferită faţă de sexe –, în cele din urmă i s-a decernat un doctorat în matematică, în 1907. Acesta nu era, totuşi, sfârşitul bătăliilor ei cu instituţiile universitare germane. Deşi fusese invitată în 1915 de David Hilbert şi de Felix Klein să vină la catedra de matematică din Göttingen, aceşti doi renumiţi matematicieni mai aveau de luptat cu autorităţile universităţii încă patru ani înainte ca lui Noether să i se permită oficial să predea. Pe perioada schimburilor de scrisori şi a hărţuielilor verbale cu administraţia, Hilbert i-a păcălit pe birocraţi, permiţându-i lui Emmy să ţină cursuri anunţate oficial sub numele lui.

Noether a demonstrat teorema16 ce-i poartă numele în 1915, la puţin timp de la sosirea ei la Göttingen. Ea a început prin a examina simetrii continue. Acestea sunt simetrii obţinute ca urmare a unor transformări ce pot fi variate continuu, cum ar fi rotaţiile (unde unghiul de rotaţie poate fi schimbat continuu). Simetria unei sfere, spre exemplu, se menţine la rotaţii arbitrar de mici, spre deosebire de cea a unui fulg de zăpadă, care rămâne simetric numai atunci când este rotit cu multipli de 60°. Rezultatul pe care l-a obţinut Noether era ameţitor. Ea a arătat că *fiecărei simetrii continue a legilor fizicii îi corespunde o lege de conservare şi viceversa.* În particular, familiara simetrie a legilor faţă de translaţii corespunde conservării momentului cinetic, simetria faţă

de trecerea timpului (faptul că legile nu se schimbă cu timpul) ne dă conservarea energiei, iar simetria faţă de rotaţii produce conservarea momentului unghiular. Momentul unghiular este o mărime ce caracterizează modificarea unghiului de rotaţie a unui obiect sau sistem (pentru un obiect punctiform, el este produsul dintre distanţa faţă de axa de rotaţie şi momentul cinetic). O manifestare a conservării momentului unghiular se poate vedea în patinajul artistic – atunci când îşi lipeşte braţele de corp, patinatoarea se roteşte mai iute.

Teorema lui Noether contopea simetriile şi legile de conservare – aceşti doi giganţi stâlpi ai fizicii nu sunt în realitate nimic altceva decât faţete diferite ale aceleiaşi proprietăţi fundamentale.

Odată cu luarea puterii de către naziști, Noether, ai cărei părinţi erau amândoi evrei, a fost silită să părăsească Germania, aşa că s-a mutat la Bryn Mawr Collège, în Statele Unite. Ea a continuat să predea la Bryn Mawr şi la Princeton până la moartea ei, survenită în 1935, în urma unei intervenţii chirurgicale. În mesajul său memorial, specialistul în fizică matematică Hermann Weyl făcea aluzie la izolarea pe care a trebuit să o îndure Emmy din pricina sexului: „Dacă noi, la Göttingen, ne refeream adeseori la ea zeflemitor folosind formularea «der Noether» (cu articolul masculin), aceasta era şi cu o respectuoasă recunoaştere a puterii ei de gânditor creator, ce părea a fi trecut peste bariera sexului”.

Simetriile pe care le-am întâlnit până acum au fost legate de o schimbare a punctului nostru de vedere în spaţiu şi timp. Multe dintre simetriile privitoare la particulele elementare şi forţele de bază ale naturii sunt de un tip diferit – ne schimbăm perspectiva asupra identităţii particulelor. Acest lucru poate suna alarmant; un electron este întotdeauna un electron, nu-i aşa? Nu tocmai, dacă vine vorba de incertitudinea ce domneşte în domeniul cuantic.

Nu uitaţi că singura certitudine din mecanica cuantică este că orice lucru e incert. Numai probabilităţile

pot fi determinate cu adevărat. Un electron poate fi nehotărât: nu se roteşte clar nici într-un sens, nici în celălalt, ci este într-o stare ambiguă, de rotaţie ba în sensul acelor de ceas, ba în sens contrar. Mai surprinzător, electronii se pot găsi în nişte stări din cauza cărora sunt confundaţi cu o altă particulă elementară, numită neutrino. Neutrino este o particulă cu masă aproape nulă şi fără sarcină electrică. Exact aşa cum luna poate fi plină, nouă sau în oricare altă fază intermediară, şi particulele pot purta eticheta de „electron", „neutrino" ori pot fi un amestec din ambele, până când efectuăm o anumită măsurătoare (cum ar fi cea a sarcinii electrice), ce poate face distincţia între ele. Conştientizarea acestei capacităţi a particulelor de a se metamorfoza, trecând dintr-o stare în alta, le-a permis fizicienilor să facă un important pas înainte, spre unificarea tuturor forţelor naturii.

Newton este cel dintâi care a introdus conceptul de unificare. Teoria gravitaţiei unifica forţa ce ţine picioarele noastre pe sol cu forţa ce menţine planetele pe orbitele lor. Înaintea lui Newton, nimeni nu bănuia că o singură forţă răspunde de ambele. Michael Faraday şi James Clerk Maxwell au introdus cea de-a doua unificare majoră – ei au dovedit că forţa electrică şi cea magnetică sunt, de fapt, aceeaşi forţă, cu înfăţişări diferite. Variaţiile câmpului electric generează un câmp magnetic şi viceversa. Pe lângă forţele gravitaţională şi electromagnetică, în natură mai distingem şi două forţe nucleare. Prima, *forţa nucleară tare,* este cea care ţine protonii şi neutronii în nucleul atomic. Fără ea, protonii ar zbura în toate părţile din pricina respingerii electromagnetice mutuale, astfel încât nu s-ar fi format nicicând un alt element în afară de hidrogen (care n-are decât un proton). *Forţa nucleară slabă* răspunde de dezintegrarea radioactivă a uraniului şi transformă un neutron într-un proton, creând, în acest proces, un electron şi un antineutrino („antiparticula" unui neutrino). Procesul de dezintegrare radioactivă a fost descoperit experimental în 1896, dar asocierea lui cu forţa nucleară slabă s-a clarificat abia în anii 1930.

Pe la finele anilor 1960, fizicienii Steven Weinberg, Abdus Salam şi Sheldon Glashow au cucerit următoarea frontieră a unificării. Într-o lucrare ştiinţifică fenomenală, ei au arătat că forţele electromagnetică şi nucleară slabă nu erau nimic altceva decât aspecte diferite ale aceleiaşi forţe, denumită în consecinţă *forţă electroslabă.* Predicţiile noii teorii erau impresionante. Forţa electromagnetică se manifestă atunci când particulele încărcate electric schimbă între ele cuante de energie numite *fotoni.* Fotonul este, de aceea, mesagerul electromagnetismului.

Teoria electroslabă prezicea existenţa unor rude apropiate ale fotonului, care joacă rolul de mesager pentru forţa slabă. Se prefigura că aceste particule nemaivăzute sunt de circa 90 de ori mai masive decât protonul şi că există în două variante: încărcate electric (numite W) şi neutre (numite Z). Experimente efectuate la consorţiul european pentru cercetare nucleară din Geneva (cunoscut drept CERN, de la Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) au dus la descoperirea particulelor W şi Z în 1983, respectiv 1984. (întâmplător, bine vânduta carte de groază a lui Dan Brown *îngeri şi demoni* a adus cercetarea de la CERN în atenţia a milioane de cititori.)

Particulele W şi Z sunt de 86, respectiv 97 de ori mai masive decât protonul, exact cum a prezis teoria. Aceasta a fost, neîndoielnic, una dintre poveştile de succes ale simetriei. Glashow, Weinberg şi Salam au izbutit să demaşte forţele electromagnetică şi nucleară slabă descoperind că la baza diferenţelor de tărie ale acestor două forţe (forţa electromagnetică este de circa o sută de mii de ori mai mare în nucleu) şi de masă ale particulelor-mesager stă o remarcabilă simetrie. Forţele naturii sunt aceleaşi dacă electronii se preschimbă în neutrino sau în orice mixtură a celor două tipuri de particule. Acelaşi lucru este adevărat dacă fotonii se preschimbă în mesagerii W şi Z ai forţei electroslabe. Simetria persistă chiar şi dacă mixturile variază de la un loc la altul sau dintr-un moment în altul. Invarianţa legilor faţă de astfel de transformări, survenite în spaţiu şi timp, a ajuns să fie cunoscută sub

denumirea de *simetrie gauge*. În limbaj ştiinţific, o *transformare gauge* reprezintă o libertate în formularea unei teorii ce nu are efecte observabile direct – cu alte cuvinte, o transformare faţă de care interpretarea fizică rămâne insensibilă. Exact aşa cum simetria legilor naturii în raport cu orice schimbare a coordonatelor spaţio-temporale reclamă manifestarea gravitaţiei, tot aşa, simetria gauge dintre electroni şi neutrino necesită existenţa fotonului şi a particulelor-mesager W şi Z. Încă o dată, dacă problema simetriei este pusă prima, legile se scriu practic singure. Un fenomen similar, în care simetria dictează prezenţa a noi grupuri de particule, se repetă în cazul forţei nucleare tari.

Quarq, gluon, grup

Particulele ce compun nucleele atomice, protonii şi neutronii, nu sunt „elementare". Ele sunt compuse din blocuri constructive17 numite *quarci.* Denumirea de *quarc* a fost aleasă de fizicianul Murray Gell-Mann, în 1963. El s-a hotărât asupra unui cuvânt care combină „a dog's bark" (un lătrat de câine) cu „a seagull's squawk" (un ţipăt de pescăruş), inventat de faimosul romancier irlandez James Joyce, în *Finnegans Wake (Veghea lui Finnegan):*

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of A bark
And sure any he had it's all Beside the mark.[5]

Quarcii vin în şase „arome", cărora li s-au dat denumiri destul de arbitrare: sus, jos, straniu, farmec, vârf, fund. Protonii, spre exemplu, sunt compuşi din doi quarci sus şi un quarc jos, iar neutronii constau în doi quarci jos şi un quarc sus. Quarcii nu posedă sarcina electrică obişnuită, ci una de un alt tip, care a fost fantezist numită *culoare,* deşi nu are nimic de-a face cu ceva vizibil. În acelaşi mod în care sarcina electrică stă la baza forţelor electromagnetice, culoarea este la originea forţei nucleare

5 Trei quarci pentru Muster, Ţintă lovită!
Sigur n-a scos Ceva aproape de-un
lătrat Si sigur orice-a scos Nu şi-a
nimerit ţinta *(n. r.*).

tari. Fiecare aromă de quarc vine în trei culori diferite, numite convenţional roşu, verde şi albastru. Există, de aceea, 18 quarci diferiţi.

Forţele naturii sunt oarbe la culoare. Exact aşa cum o tablă de şah infinită ar arăta la fel dacă interschimbăm albul cu negrul, tot aşa, forţa dintre un quarc verde şi unul roşu este aceeaşi ca cea dintre doi quarci albaştri sau dintre un quarc albastru şi unul verde. Chiar dacă ar fi să utilizăm întreaga „paletă" a mecanicii cuantice şi să înlocuim fiecare dintre stările definite printr-o culoare „pură" cu o stare dată de un amestec de culori (de exemplu cu „galben", reprezentând un amestec de roşu şi verde, sau cu „azuriu", pentru un amestec albastru-verde), legile naturii ar rămâne aceleaşi. Legile rămân simetrice la orice transformare a culorii. Mai mult decât atât, simetria de culoare este tot de tip gauge – legilor naturii le este indiferent dacă aceste culori de bază sau nuanţele rezultate din amestecuri variază de la o poziţie la alta sau de la un moment la următorul.

Am văzut deja că simetria gauge ce caracterizează forţa electroslabă – libertatea de a interschimba electronii şi neutrino – dictează existenţa unor particule-mesager electroslabe (foton, W şi Z). Similar, simetria gauge faţă de culoare reclamă prezenţa a opt grupuri de *gluoni.* Gluonii sunt mesagerii forţei tari ce leagă quarcii pentru a forma particule compuse, cum ar fi protonul. Apropo, „sarcinile" de culoare ale celor trei quarci ce alcătuiesc un proton sau un neutron sunt toate diferite (roşu, albastru, verde) şi ele se însumează pentru a da sarcina de culoare zero sau „alb" (echivalentă cu neutralitatea electrică în electromagnetism). Deoarece simetria de culoare stă la baza forţelor dintre quarci – forţe mediate de gluoni –, teoria acestora a devenit cunoscută drept *cromodinamica cuantică.* Mariajul teoriei electroslabe (care descrie forţele electromagnetice şi nucleare slabe) cu cromodinamica cuantică (care descrie forţa nucleară tare) a produs *modelul standard* – teoria de bază a particulelor elementare şi a legilor fizice ce le guvernează.

Dacă începeţi să vă simţiţi un pic ameţiţi de la toate aceste particule elementare diferite, să ştiţi că nu sunteţi singurii. Faimosul fizician Enrico Fermi (1901 – 1954), care era considerat „ultimul savant universal” (în sensul de cunoscător al tuturor domeniilor fizicii), este citat că ar fi zis odată: „Dacă mi-aş putea aminti numele tuturor acestor particule [pe departe mai puţine decât cele cunoscute în prezent], aş fi botanist”. Câteva dintre ciudatele proprietăţi ale particulelor elementare au pătruns chiar şi în cultura populară. Fiziciana şi scriitoarea

Cindy Schwarz a compilat o întreagă colecţie18 de proză şi poezie despre particulele elementare, scrise de studenţi de la Vassar Collège. Un astfel de poem, de Vanessa Pepoy, se intitulează „Cromodinamică”:

Roşu verde albastru Trinitate de culori.
Fundamentale.
Organizaţionale.
Principiu Conţinut într-o Particulă.
Lumină albă Invizibilă.

Aţi observat, poate, că particulele implicate în simetriile gauge tind să formeze familii de rude foarte apropiate (de exemplu, protonii şi neutronii). Istoriceşte vorbind, chiar şi mai înainte de sugestia că protonii şi neutronii sunt compuşi din câte trei quarci ce schimbă între ei gluoni, fizicienii au remarcat izbitoare similarităţi între aceşti doi vecini intranucleari. Nu numai că sunt foarte apropiaţi ca masă, dar şi forţa tare dintre ei este aceeaşi, indiferent dacă acţionează între doi neutroni, un neutron şi un proton sau oricare două stări intermediare ale celor doi. Odată cu apariţia acceleratoarelor de particule de înaltă energie, în anii 1950, o întreagă grădină zoologică pare a se fi ivit. Încercând să pună într-o oarecare ordine menajeria ce prolifera rapid, Murray Gell-Mann şi fizicianul israelian Yuval Ne eman au remarcat că protonii şi neutronii erau foarte asemănători cu alte şase particule. Ei au mai identificat şi alte astfel de familii lărgite, de opt sau zece membri. Gell-Mann a numit această simetrie „optuplul drum”, făcând aluzie la cele opt

principii din calea budistă a autodezvoltării, ce se presupune că duce la sfârşitul suferinţei. Conştientizarea faptului că simetria este cheia pentru înţelegerea proprietăţilor particulelor subatomice a condus la o întrebare inevitabilă: Există vreun mod eficient de caracterizare a tuturor acestor simetrii ale legilor naturii? Sau, mai specific, care este teoria de bază a transformărilor ce pot schimba continuu un amestec de particule într-altul, ducând la formarea familiilor observate? Probabil că aţi ghicit deja răspunsul. Profundul adevăr al frazei pe care am citat-o mai înainte s-a revelat încă o dată: „Ori de câte ori grupurile s-au dezvăluit singure sau au putut fi introduse, simplitatea s-a cristalizat din haos”. Fizicienii din anii 1960 se înfiorau descoperind că matematicienii neteziseră deja drumul. Exact aşa cum, cu o jumătate de secol mai înainte, Einstein aflase de trusa de instrumente geometrice pregătită de Riemann, tot aşa, Gell-Mann şi Ne eman au dat peste impresionanta lucrare de teoria grupurilor a lui Sophus Lie. Ideile lui Lie au devenit atât de importante 19 pentru fizica energiilor înalte încât se cuvin câteva cuvinte despre acest excepţional matematician.

Sophus Lie (figura 95) a ajuns la matematică20 pe un drum oarecum ocolit. La Universitatea „Regele Fredrik” din Christiania (Oslo de azi) el nu a demonstrat nicio pasiune deosebită pentru această disciplină şi nicio capacitate ieşită din comun, deşi studiase lucrările lui Abel şi Galois. Unul dintre dascălii săi, Ludvig Sylow (1832 – 1918), el însuşi un faimos matematician, a mărturisit mai târziu că n-ar fi ghicit niciodată că tânărul Lie avea să devină una dintre cele mai luminate minţi matematice ale secolului. Şi totuşi, după câţiva ani de ezitare, timp în care a fost bântuit de idei sinucigaşe, Lie a început să se intereseze din ce în ce mai mult de matematică. În 1868, el a ajuns în sfârşit la concluzia că „exista un matematician ascuns în mine”.

În timpul unor voiaje făcute la Berlin şi la Paris în 1869 şi 1870, Lie s-a întâlnit şi s-a împrietenit cu Felix

Klein. La Paris, el l-a cunoscut şi pe Camille Jordan (1838 – 1922), care l-a convins că teoria grupurilor ar putea juca un rol crucial în studiul geometriei. Eforturile combinate ale lui Lie şi Klein în această arenă au procurat seminţele pentru celebrul Program de la Erlangen al lui Klein, asupra caracterizării geometriei pe baza teoriei grupurilor.

În 1870, evenimente politice au complicat colaborarea dintre cei doi tineri matematicieni. Izbucnirea războiului dintre Franţa şi Prusia l-a silit pe Klein să părăsească Parisul, pentru a se îndrepta spre Berlin. Lie a încercat s-o ia spre Italia pe jos, dar n-a ajuns decât până la Fontainebleau, unde a fost arestat. Pentru conducătorii armatei franceze, densele studii matematice ale norvegianului semănau, desigur, cu nişte mesaje codate ale unui spion german. Din fericire pentru Lie, matematicianul francez Gaston Darboux a intervenit şi l-a eliberat din închisoare. Doi ani mai târziu, Universitatea din Christiania nu a repetat greşeala pe care o făcuse cu Abel. Facultatea şi oficialii i-au recunoscut neobişnuitele talente şi au creat o catedră de matematică pentru el. Lie a continuat să colaboreze intermitent cu Klein până în 1892, când între ei a izbucnit o ceartă urâtă. Parţial, aceasta fusese cauzată de impresia lui Lie că nu i se recunoscuse cum se cuvenea rolul în elaborarea Programului de la Erlangen. În 1893, el a emis o declaraţie în care îl ataca public pe Klein. Printre altele spunea: „Nu sunt elevul lui Klein şi nici invers, deşi ultimul caz ar putea fi mai aproape de adevăr”. Klein n-a contribuit la îmbunătăţirea situaţiei atrăgând atenţia (de presupus că în „apărare” faţă de acţiunile lui Lie) asupra problemelor mintale de care suferise Lie la sfârşitul anilor 1880. Dar aceste evenimente nu afectează genialitatea lui Lie.

Cei doi giganţi norvegieni din ultima parte a secolului al nouăsprezecelea, Lie şi Sylow, şi-au recunoscut pe deplin datoria intelectuală faţă de strălucita stea a matematicii norvegiene – Abel. Vreme de opt ani, ei şi-au asumat migăloasa sarcină de a pregăti şi publica operele complete ale acestuia. Cam în aceeaşi perioadă, Lie a

început să lucreze la grupurile de transformări continue (cum ar fi translaţiile şi rotaţiile din spaţiul obişnuit). Acest proiect a culminat cu publicarea, între 1888 şi 1893, a unei teorii lărgite şi a unui catalog detaliat de astfel de grupuri (în colaborare cu matematicianul german

Friedrich Engel). Membrii clasei de grupuri continue studiate de Lie au ajuns ulterior să fie cunoscuţi sub denumirea de *grupuri Lie.*

Grupurile Lie erau exact instrumentele de care aveau nevoie Gell-Mann şi Ne eman pentru a caracteriza schema generală ce stătea la baza nou-descoperitei grădini zoologice de particule. Spre deliciul lor, cei doi fizicieni au descoperit că matematicianul german Wilhelm Killing (1847 – 1923) şi matematicianul francez Elie-Joseph Cartan (1869 – 1951) le făcuseră munca şi mai uşoară. Să ne amintim că, pentru demonstraţia sa privind rezolvabilitatea ecuaţiilor, Galois a definit nişte subgrupuri particulare care se numesc normale (Capitolul 6). Dacă un grup nu are subgrupuri normale (altele decât cele două subgrupuri triviale, unul compus numai din transformarea identică şi celălalt reprezentat de grupul însuşi), el se numeşte *simplu.* Grupurile simple sunt blocurile constructive de bază ale teoriei grupurilor, în acelaşi sens în care numerele prime (divizibile numai cu ele însele şi cu 1) sunt blocurile constructive ale tuturor numerelor întregi. Cu alte cuvinte, toate grupurile pot fi construite din grupuri simple, iar grupurile simple nu pot fi descompuse mai departe printr-un proces similar. Killing a schiţat clasificarea grupurilor Lie simple în 1888; clasificarea a fost completată şi perfecţionată de Cartan în 1894. Există patru familii infinite de grupuri Lie simple şi cinci grupuri simple *excepţionale* (sau *sporadice),* care nu se potrivesc în niciuna dintre cele patru familii. Gell-Mann şi Ne eman au descoperit că un astfel de grup Lie simplu, numit „grup unitar special de grad 3" sau SU (3), se potrivea de minune cu „optuplul drum" – structura de familie de care se descoperise că ascultă particulele. Frumuseţea simetriei SU (3) era dezvăluită de puterea sa

predictivă. Gell-Mann şi Ne eman au arătat că, dacă teoria era adevărată, trebuia găsit un al zecelea membru anterior necunoscut al unei familii particulare de nouă particule. Extensiva vânătoare a particulei lipsă s-a desfăşurat în 1964, printr-un experiment cu acceleratorul de la Brookhaven National Lab, de pe Long Island. Yuval Ne eman mi-a spus câţiva ani mai târziu că, auzind că fuseseră deja analizate o jumătate dintre date fără a fi descoperită particula anticipată, se gândise serios să părăsească definitiv fizica. Simetria a triumfat până la urmă – particula lipsă (numită omega minus) a fost găsită şi avea exact proprietăţile prezise de teorie.

Toate simetriile ce caracterizează modelul standard (de exemplu, simetria schimbului de culori între quarci) pot fi reprezentate ca produse de grupuri Lie simple. Încercarea de pionierat de a descrie matematic astfel de simetrii fizice a fost făcută de fizicienii Chen Ning Yang şi Robert Mills, în 1954. Pe bună dreptate, ecuaţiile ce descriu forţa nucleară slabă (în analogie cu ecuaţiile lui Maxwell, care descriu electromagnetismul) se numesc ecuaţiile Yang-Mills. Prin lucrările lui Weinberg, Glashow şi Salam asupra teoriei electroslabe şi elegantul cadru de lucru elaborat de fizicienii David Gross, David Politzer şi Frank Wilczek pentru cromodinamica cuantică, grupul caracteristic al modelului standard a fost identificat cu un produs de trei grupuri Lie notate cu U (1), SU (2) şi SU (3). Într-un anume sens, de aceea, drumul spre definitiva unificare a forţelor naturii trebuie să treacă prin descoperirea celui mai convenabil grup Lie ce conţine produsul U (1) X SU (2) X SU (3).

Experienţa cu relativitatea restrânsă şi generală, precum şi modelul standard al particulelor elementare nu pot conduce decât la o singură concluzie. Simetria şi teoria grupurilor au un tulburător mod de a-i îndrepta pe fizicieni pe drumul cel bun. Acest lucru poate părea oarecum surprinzător la prima vedere, fiindcă cerinţa de simetrie impune constrângeri destul de rigide. Aşa cum am văzut, odată ce un motiv repetat la infinit într-o dimensiune este

obligat să asculte de simetriile mişcărilor corpurilor rigide, nu sunt permise decât şapte motive distincte de şiruri de elemente. Chiar şi în două dimensiuni, se poate demonstra că motivele repetitive de „tapet de hârtie” sunt limitate la 1721. Restricţii similare sunt impuse oricărei teorii ce încorporează simetria. Dar oare nu stânjenesc aceste constrângeri libertatea pe care, altminteri, ar putea-o avea teoria? Desigur că da, iar această interdicţie este un rezultat dorit. Fizicienii sunt în căutarea unei *unice* teorii care să explice universul, nu a mai multora, toate făcând treaba la fel de bine. Dacă în Capitolul 5 v-aş fi prezentat douăzeci şi trei de teorii diferite cu privire la moartea lui Galois, toate pe deplin compatibile cu dovezile de care dispunem, probabil că n-aţi fi fost foarte satisfăcuţi. Simetria ne ajută nu numai să evităm starturi greşite şi alei înfundate, ci şi să traversăm cele mai dificile părţi, fazele de „decizii peste decizii” ce caracterizează alegerile.

Biblia ne spune că, după ce au părăsit Egiptul, israeliţii22 au fost călăuziţi prin desert de „un stâlp de foc noaptea, ca să le dea lumină”. Simetria a fost stâlpul de foc al oamenilor de ştiinţă, conducându-i către relativitatea generală şi modelul standard. Îi poate ea oare conduce şi la unificarea celor două?

Armonia stringurilor

Istoricilor le place să ne atragă atenţia că, judecate retrospectiv, anumite revoluţii sociale au fost nişte eşecuri. Prin contrast, cele două revoluţii ştiinţifice ale secolului XX au fost indiscutabile succese. Relativitatea generală a prezis curbarea luminii în jurul corpurilor cosmice, fenomenul de colaps, reprezentat de găurile negre, şi expansiunea universului, toate acestea fiind confirmate prin observaţii. Teoria cuantică a fost confirmată în electrodinamică cu o uimitoare precizie, iar giuvaierul său de coroană – modelul standard – a surprins şi a prezis cu succes toate proprietăţile particulelor subatomice cunoscute. Aici, totuşi, este o problemă. Avem o teorie extrem de reuşită la scară astronomică (stele, galaxii, univers) şi o alta la scară subatomică (atomi, quarci,

fotoni). Acest lucru ar putea fi în regulă dacă cele două lumi n-ar avea să se întâlnească niciodată. Dar într-un univers care şi-a început expansiunea pornind de la un Big Bang23 – o stare extrem de compactă şi teribil de fierbinte –, era inevitabil ca drumurile relativităţii generale şi mecanicii cuantice să se întretaie. Numeroase dovezi, cum ar fi formarea elementelor din tabloul periodic, indică faptul că şi „marele" a fost cândva mic. Mai mult decât atât, unele entităţi, ca găurile negre, trăiesc atât în domeniul astronomic, cât şi în cel cuantic. Drept consecinţă, mergând pe urmele încercărilor nereuşite ale lui Einstein de a uni relativitatea generală cu electromagnetismul, mulţi fizicieni s-au angajat în cel mai mare efort de unificare care a fost făcut vreodată – cel al relativităţii generale cu mecanica cuantică.

Obstacolul major ce a afectat dintotdeauna strădaniile de unificare a fost reprezentat de simplul fapt că, la suprafaţă, relativitatea generală şi mecanica cuantică par realmente24 incompatibile. Conceptul-cheie al teoriei cuantice este, după cum am mai spus, principiul incertitudinii. Atunci când încercăm să probăm poziţiile cu o putere de mărire mereu crescută, momentele (sau vitezele) încep să oscileze violent. Sub o anumită lungime minusculă, cunoscută sub denumirea de *lungimea lui Planck*, întreaga idee de spaţiu-timp neted se pierde. Această lungime (egală cu 1, 616012 X 10 – 35 metri) determină scara la care gravitaţia trebuie tratată în termeni de mecanică cuantică. Pentru scări mai mici, spaţiul se transformă într-o veşnic fluctuantă „spumă cuantică". Dar chiar premisa fundamentală a relativităţii generale fusese existenţa unui spaţiu-timp ce se curbează delicat. Cu alte cuvinte, *ideile centrale ale relativităţii generale şi mecanicii cuantice se ciocnesc ireconciliabil dacă se ajunge la scări extrem de mici.*

Cel mai bun pariu actual pentru o teorie cuantică a gravitaţiei pare a fi o versiune a *teoriei stringurilor*. Conform cu această revoluţionară teorie, particulele elementare nu sunt entităţi punctiforme fără structură

internă, aşa cum ar vrea să ne facă să credem modelul standard, ci minuscule stringuri (bucle de coarde vibratoare). Aceste bucle infinit de subţiri, ca nişte benzi de cauciuc, sunt aşa de mici (de ordinul lungimii lui Planck; circa de o sută de miliarde de ori mai mici decât protonul), încât pentru puterea de separare a aparatelor din zilele noastre ele apar ca nişte puncte. Frumuseţea principalei idei a teoriei stringurilor este aceea că toate particulele elementare cunoscute sunt considerate a reprezenta doar moduri de vibraţie diferite ale unui aceluiaşi strâng de bază. Exact aşa cum o coardă de vioară sau de chitară poate fi ciupită pentru a produce diferite armonii, diferitele motive vibraţionale ale stringului de bază corespund unor particule de materie distincte, ca electronii şi quarcii. Acelaşi lucru este valabil şi pentru purtătorii forţei. Particulele-mesager, ca gluonii sau W şi Z, îşi datorează existenţa altor armonii. Simplu spus, toate particulele de materie şi forţă ale modelului standard sunt parte a repertoriului pe care-l pot interpreta stringurile. Cel mai impresionant, totuşi, este că s-a găsit că o configuraţie particulară de strâng are proprietăţi ce se potrivesc exact cu *gravitonul* – mesagerul anticipat al forţei gravitaţionale. Aceasta era pentru prima oară când cele patru forţe fundamentale ale naturii erau adăpostite, chiar şi numai cu titlu de încercare, sub acelaşi acoperiş.

S-ar putea crede că o realizare de o asemenea importanţă – Sfântul Graal al fizicii moderne – ar fi imediat aclamată de întreaga comunitate ştiinţifică. Totuşi, reacţia pe la mijlocul anilor 1970 a fost alta. Anii de frustrare pierduţi cu încercările de a unifica relativitatea generală cu mecanica cuantică construiseră un zid gros de scepticism. Afirmaţia fizicienilor John Schwarz, de la California Institute of Technology, şi Joël Scherk25, de la École Normale Supérieure din Paris, că teoria strângerilor uneşte în sfârşit gravitaţia cu forţa nucleară tare era universal ignorată. Această situaţie a persistat vreme de peste un deceniu. În această perioadă, aproape fiecare pas înainte era imediat urmat de descoperirea vreunei subtile

dificultăţi, rezultatul fiind nouă zecimi de pas înapoi. Epocalul progres a fost făcut în 198426, când fizicienii Michael Green, pe atunci la Queen Mary Collège, şi John Schwarz au demonstrat că teoria stringurilor ar putea asigura cu adevărat definitiva unificare pe care o căuta toată lumea. O frenetică activitate s-a dezlănţuit, unii dintre cei mai mari teoreticieni angajându-se într-o goană după ce apărea a fi căutarea „teoriei a tot ce există” – fundaţia cea mai adâncă pe care putea fi construit restul fizicii. Aşa cum este adeseori cazul în ştiinţă, valul de entuziasm (poreclit „prima revoluţie superstring”) a lăsat însă curând locul unei faze de muncă grea, plină de frustrări. Spre deosebire de cazul lui SU (3), unde toate instrumentele matematice existau deja, aşteptând ca fizicienii să facă uz de ele, teoreticienii stringurilor trebuiau să elaboreze din mers matematica necesară.

Cu toate acestea, aşa cum vom vedea în secţiunea următoare, grupurile ofereau încă limbajul corect pentru a descrie schemele subiacente.

Dar cum îşi propune teoria stringurilor să rezolve27 conflictul fundamental dintre geometria „netedă” a relativităţii generale şi violentele fluctuaţii ale mecanicii cuantice? Atribuind o oarecare incertitudine chiar şi dimensiunilor spaţiu-timp, similară celei pe care mecanica cuantică o conferă poziţiilor şi mişcărilor particulelor.

Să ne imaginăm că vrem să desenăm un nor. Dacă norul de pe cer pe care-l alegem drept model este relativ îndepărtat, aproape de orizont, putem, probabil, reproduce destul de precis forma pe care o observăm. Dacă, pe de altă parte, norul este relativ aproape, devine tot mai dificil să imortalizăm contururile sale în permanentă schimbare. Utilizarea unui sistem optic de mărire, permiţându-ne să vedem până la scară submoleculară, ar face orice încercare de reproducere să fie lipsită de speranţă. Teoria stringurilor afirmă că, tratând particulele elementare şi mesagerii de forţă drept obiecte punctiforme adimensionale, fizica încerca să cerceteze universul la scări aflate sub limita inteligibilă. Cu alte cuvinte,

deoarece stringurile, cei mai de bază constituenţi ai universului, sunt obiecte cu o oarecare lungime, de ordinul celei a lui Planck, distanţele mai mici decât lungimea lui Planck sunt în afara domeniului fizicii. Concentrându-ne numai asupra unor scări cu unităţi de măsură mai mari decât lungimea lui Planck, putem elimina violentele fluctuaţii şi evita conflictul. Deloc surprinzător, doza de incertitudine din cadrul de lucru al teoriei stringurilor schimbă natura evenimentelor din spaţiu-timp. Deşi, în modelul standard, orice interacţiune dintre două particule apare într-un punct bine definit din spaţiu-timp, lucru cu care sunt de acord toţi observatorii, situaţia din teoria stringurilor este diferită (figura 96).

Datorită lungimii pe care o au stringurile, nu putem spune precis când şi unde interacţionează ele. Atât locul cât şi timpul interacţiunii sunt „şterse”. Situaţia poate fi asemănată (numai superficial) cu incapacitatea noastră de a prezice când şi unde se va rupe un iades tras de ambele capete.

Abia revenindu-şi după revoluţia prin care a trecut înţelegerea spaţiului-timp datorită relativităţii lui Einstein, fizicienii trebuiau să se adapteze la noile concepte introduse de revoluţia stringurilor. Din fericire, conceptul nostru familiar nu numai că a supravieţuit acestei revoluţii, dar a ajuns şi în perioada sa de glorie datorită teoriei stringurilor.

Nu doar simetrie – supersimetrie

Legile naturii nu depind de loc, unghi sau moment. Ele sunt simetrice faţă de translaţii, rotaţii şi trecerea timpului. Ele sunt, de asemenea, identice pentru toţi observatorii, indiferent dacă aceştia se află în mişcare uniformă sau accelerată. Aceasta este esenţa principiului covarianţei generale, formulat de Einstein. Aşa cum observatorii care se mişcă uniform pot crede că sunt în repaus, orice în jurul lor fiind în mişcare, acelaşi lucru îl pot face şi observatorii aflaţi în mişcare accelerată. Aceştia din urmă sunt perfect îndreptăţiţi să susţină că forţele suplimentare pe care le simt se datorează unui câmp

gravitaţional (conform cu principiul echivalenţei). Prin anul 1967, fizicienii gândeau că nu pot exista alte simetrii decât acelea asociate cu schimbarea poziţiei noastre privilegiate din spaţiu şi timp. De fapt, exista chiar şi o teoremă28 care susţinea că demonstrează acest lucru. Spre surpriza multor fizicieni, cercetarea intensă din următorii patru ani a dus la descoperirea că mecanica cuantică permite o simetrie suplimentară. Această neaşteptată simetrie a fost denumită *supersimetrie*.

Supersimetria este o simetrie subtilă29, bazată pe conceptul de spin din mecanica cuantică. Ne aducem aminte (din Capitolul 1) că spinul electronului este o proprietate intrinsecă, la fel ca şi sarcina sa electrică, ce seamănă în anumite privinţe cu clasicul moment unghiular – ca şi cum electronul s-ar roti în jurul axei sale. Spre deosebire de corpurile ce se rotesc în sens clasic, ca un titirez, cu viteză mare sau mică, electronii au totdeauna numai un spin, bine determinat. În unitatea cu care se măsoară acest spin în mecanica cuantică (numită *constanta lui Planck),* electronii au o jumătate de unitate sau sunt particule cu „spin 1/2”. De fapt, toate particulele de materie din modelul standard – electroni, quarci, neutrino şi două alte tipuri numite mezoni şi tauoni – toate au „spin 1/2”. Particulele cu spin 1/2 se numesc *fermioni* (după fizicianul italian Enrico Fermi). Pe de altă parte, purtătorii de forţă – fotonul, W, Z şi gluonii – toţi au o unitate de spin sau sunt particule cu „spin 1” în argoul fizicii. Purtătorul de gravitaţie – gravitonul – are „spin 1”, aceasta fiind exact proprietatea identificatoare descoperită la unul dintre stringuri. Toate particulele cu unităţi întregi de spin se numesc *bozoni* (după fizicianul indian Satyendra Bose). Aşa cum spaţiul-timp obişnuit este asociat cu simetria faţă de rotaţii, spaţiul-timp din mecanica cuantică este asociat cu supersimetria bazată pe spin. Predicţiile supersimetriei, dacă sunt ascultate cu adevărat, sunt pline de consecinţe. Într-un univers bazat pe supersimetrie, *orice particulă cunoscută din univers trebuie să aibă un partener încă nedescoperit* (sau „superpartener”).

Particulele materiale cu spin 1/2, ca electronii şi quarcii, trebuie să aibă superparteneri cu spin 0. Fotonii şi gluonii (cu spin 1) trebuie să aibă superparteneri cu spin 1/2, numiţi *fotino,* respectiv *glumo.* Mai important însă, încă din anii 1970, fizicienii şi-au dat seama că singurul mod în care teoria stringurilor putea include motive fermionice de vibraţie (putând, astfel, să explice constituenţii materiei) era acela ca teoria să fie supersimetrică. În versiunea supersimetrică a teoriei, motivele vibraţionale bozonice şi fermionice vin inevitabil în perechi. Mai mult decât atât, teoria supersimetrică a stringurilor a reuşit să evite o altă mare bătaie de cap, care fusese asociată cu formularea originală (nesupersimetrică) – particulele cu masă imaginară. Amintiţi-vă că rădăcinile pătrate ale numerelor negative se numesc numere imaginare. Înainte de supersimetrie, teoria stringurilor producea un straniu motiv de vibraţie (numit *tahion)* a cărui masă era imaginară. Fizicienii au scos un oftat de uşurare atunci când supersimetria a eliminat aceste nedorite bestii.

Nu mai este nevoie să spunem că toate simetriile şi motivele subiacente ale versiunilor curente ale teoriei stringurilor sunt descrise de grupuri. O versiune, spre exemplu, cunoscută sub intimidantul nume de *tipul heterotic Eg* X E8, se bazează pe unul dintre grupurile Lie sporadice.

Următorul pas critic în confirmarea sau respingerea teoriei stringurilor va fi, desigur, acela de a putea descoperi particulele supersimetrice prezise. Fizicienii speră că acest lucru este posibil cu acceleratorul denumit Large Hadron Collider (LHC) de la CERN. Cam prin 2007, ne aşteptăm ca acest cel mai mare accelerator din lume să atingă energii de aproape opt ori mai mari decât cele realizabile în momentul scrierii acestei cărţi. Dacă se găsesc într-adevăr superparteneri, proprietăţile lor vor furniza indicii cruciale cu privire la forma definitivă a teoriei. Dacă ei nu sunt găsiţi, aceasta ar putea fi o indicaţie că teoria merge într-o direcţie complet greşită.

Teoria stringurilor progresează într-un ritm atât de

incredibil, încât orice persoană neimplicată direct în studiul ei găseşte că e foarte dificil să o urmărească în detaliu. Cercetarea curentă continuă să aibă în avangarda ei pe Edward Witten de la Institutul pentru Studii Avansate de la Princeton şi pe mulţi alţii, prea numeroşi pentru a-i numi aici. Matematica utilizată în aceste studii devine tot mai complexă. Nu numai că numerele obişnuite sunt înlocuite de o clasă mai largă de numere cunoscute sub denumirea de *numere Grassmann*30 (după matematicianul prusac Hermann Grassmann), dar şi geometria obişnuită este depăşită de o ramură specială, numită *geometrie necomutativă*, care a fost elaborată de matematicianul francez Alain Connes.

În pofida instrumentelor ultramoderne ce şi-au pus amprenta asupra ei, teoria stringurilor este, de fapt, în etapa copilăriei. Unul dintre pionierii săi, fizicianul italian Daniele Amati, a caracterizat-o drept „parte a secolului al XXI-lea care a căzut din întâmplare în secolul XX”. Într-adevăr, există ceva în însăşi natura teoriei, aşa cum este ea în prezent, care ne atrage atenţia asupra faptului că suntem martorii paşilor unui bebeluş. Să ne reamintim de lecţia învăţată de pe urma tuturor marilor idei apărute de la relativitatea lui Einstein încoace – *puneţi simetria pe primul loc.* Simetria este la originea forţelor. Principiul echivalenţei – speranţa că toţi observatorii, indiferent de mişcările lor, vor deduce aceleaşi legi – *reclamă* existenţa gravitaţiei. Simetriile gauge – faptul că legile nu disting culoarea sau electronii de neutrino – *dictează* existenţa mesagerilor forţelor tare şi electroslabă. Şi totuşi, supersimetria este un rezultat al teoriei stringurilor, o consecinţă a structurii sale, mai curând decât o sursă a existenţei sale. Ce înseamnă aceasta? Mulţi teoreticieni ai stringurilor cred că un principiu mai cuprinzător, care va necesita existenţa teoriei stringurilor, încă rămâne să fie găsit. Dacă este să se repete istoria, acest principiu ar putea să implice o simetrie atotcuprinzătoare şi chiar mai constrângătoare, dar în acest moment nimeni n-are vreo idee care ar putea fi acest principiu. Fiindcă, totuşi, nu

suntem decât la începutul secolului al XXI-lea, caracterizarea făcută de Amati se poate încă dovedi a fi o uimitoare profeţie.

Aşa cum aţi văzut în acest capitol, fizicienii au ridicat simetria până la poziţia de concept central în încercările lor de a organiza şi explica un univers altminteri complex şi năucitor. Acest fapt ridică unele întrebări interesante. Prima, de ce găsim atât de atrăgătoare simetria? A doua, poate şi mai dificilă, sunt cu adevărat inevitabile explicaţiile de teoria grupurilor bazate pe simetrie? Sau, este oare creierul uman făcut să sesizeze numai aspectele simetrice ale universului? Pentru a înţelege de ce ne atrage simetria atât de mult, trebuie să pricepem cum afectează ea mintea umană.

8

Cine-i cel mai simetric dintre toţi?

5

C

ăt timp credeţi că aţi putea purta o conversaţie civilizată cu omul din figura 97 înainte ca poziţia strâmbă a ochelarilor să vă scoată din pepeni? Sau să presupunem că intraţi în casa cuiva şi descoperiţi că tablourile atârnate pe pereţi sunt „aranjate” aşa cum se vede în figura 98. N-aţi dori instinctiv să le îndreptaţi? Cum şi de ce s-a dezvoltat această nevoie de simetrie bilaterală în mintea omenească? Unul dintre scopurile psihologiei evoluţioniste este de a răspunde tocmai unor întrebări de acest tip.

Psihologia evoluţionistă este o ştiinţă1 care încearcă să combine tot ce-i mai bun în cele două lumi – biologia evoluţionistă şi psihologia cognitivă. În această concepţie, mintea omenească este realmente o colecţie de numeroase module specializate, care au fost proiectate şi modelate de selecţia naturală pentru a rezolva probleme de adaptare foarte particulare. Problema de adaptare este orice provocare pusă de mediul ambiant, la care minţile strămoşilor noştri umani aveau nevoie să se ridice pentru ca aceste creaturi bipede să supravieţuiască şi să se reproducă cu succes. Cu alte cuvinte, potrivit pionierilor

psihologiei evoluţioniste Leda Cosmides şi John Tooby, mintea omenească seamănă puţin cu un cuţit militar elveţian, cu multe „chiţibuşuri” diferite.

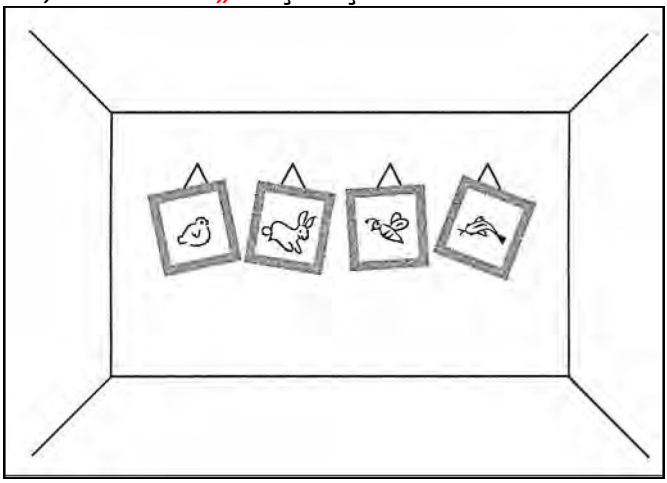


Figura 98

fiecare dintre ele proiectată pentru o sarcină diferită. Psihologii evoluţionişti resping ideea proceselor mintale cu scop mai general. Ei argumentează convingător că toate problemele cu care s-au confruntat vreodată hominizii erau mai degrabă de natură particulară decât generală.

Indicii venind dintr-o diversitate de domenii, de la biologie şi antropologie până la arheologie şi paleontologie, sugerează care au fost cele mai cruciale probleme de adaptare. În termeni largi, acestea includ scăparea de prădători, identificarea hranei bune, formarea alianţelor, sprijinirea urmaşilor şi a rudelor apropiate, comunicarea cu alţi oameni şi alegerea tovarăşilor de viaţă. Unde intervine simetria în toate astea?

Înfricoşătoarea simetrie

Puţini s-ar putea întrece cu Oscar Wilde în replici spirituale. În *Portretul lui Dorian Grey,* el declară: „Un om nu poate fi niciodată prea atent la alegerea duşmanilor săi”. Lăsând gluma deoparte, dintr-un punct de vedere evoluţionist, aceasta este o observaţie foarte perspicace. Genele nu-şi pot îndeplini una dintre principalele lor

sarcini – de a trece intacte la generaţia următoare – dacă purtătorul lor se lasă devorat de un animal de pradă. Orice gene care ajută cumva un animal să scape de prădători ar fi, de aceea, inevitabil favorizate de selecţia naturală. Astfel de gene ar participa la construcţia evoluţionistă a „modulelor de evitare a prădătorilor”. Sarcinile acestor module sunt destul de evidente. În primul şi în primul rând, trebuie detectaţi potenţialii prădători. Fără o detecţie timpurie, nu se poate întreprinde nicio acţiune, iar consecinţele sunt catastrofale. Numai în etapele ulterioare este necesară activarea celorlalte funcţii – pericolele reale trebuie deosebite de alarmele false, iar reacţiile, declanşate corespunzător. Drept urmare, este nevoie ca modulele de evitare a prădătorilor să fie în primul rând dispozitive de detectare a lor.

Numeroase experimente arată că sistemele de percepţie ale multor creaturi, de la albine şi porumbei până la oameni, sunt foarte sensibile la simetrie bilaterală. Modelele simetrice sunt detectate mai iute decât cele asimetrice şi sunt mai uşor asimilabile şi recuperabile din memorie. Această capacitate întâlnită la toate speciile, poate fi cumva legată de nevoile de evitare a prădătorilor? Care era problema adaptivă precisă2 pe care echipamentul perceptual încerca s-o rezolve? O indicaţie privitoare la răspuns ar putea fi culeasă punând întrebarea în mod diferit: Într-o lume lipsită de biserici, maşini, avioane şi alte realizări umane, ce arată bilateral simetric? Răspunsul este evident ca şi nasul de pe propria faţă – animalele şi oamenii! De fapt, deşi spatele unui leu este şi el bilateral simetric, simetria aceasta nu este la fel de izbitoare ca cea observabilă din faţă. Cu alte cuvinte, detectarea simetriei bilaterale se traduce pentru un animal, mai mult sau mai puţin, în „Sunt supravegheat”. Nu-i neapărat nevoie ca intenţiile celui care supraveghează să fie rele – el s-ar putea, pur şi simplu, să se bucure de privelişte sau să-şi caute o pereche. Dar nu încape vorbă că detectarea timpurie a simetriei bilaterale ar putea face diferenţa dintre viaţă şi moarte pentru subiecţii aflaţi „în vizor”.

Neurologul Joseph LeDoux, de la Centrul pentru Ştiinţe Neurale al Universităţii din New York, este unul dintre pionierii studierii emoţiilor ca fenomene pur fiziologice, nu comportamentale. Pe LeDoux nu-l interesează sentimentele complexe, ca amestecul de dragoste şi aversiune sau zbaterea conştientă la care duce interacţiunea dintre dorinţă şi gelozie. El studiază circuitele din creier care transmit sentimentul de teamă3. LeDoux găseşte că reacţia la teamă este una de tip cognitiv inconştient, care nu implică „sistemele superioare de prelucrare cerebrală". Spus simplu, modulul de detectare a prădătorilor se confruntă cu dilema oricărui proiectant de sisteme de alarmă contra hoţilor. Pe de o parte, proiectanţii doresc ca sistemul să poată răspunde instantaneu la orice încercare de efracţie, dar pe de alta, ei vor să reducă numărul de alarme false. Punându-le pe cântar, totuşi, un răspuns întârziat s-ar putea dovedi mult mai costisitor şi mai periculos decât câteva alarme false. Deloc surprinzător, de aceea, LeDoux consideră că există două căi neurale separate; prin intermediul cărora operează creierul. O rută mai scurtă, „rapidă şi murdară", le permite animalelor să reacţioneze la stimulii potenţial periculoşi chiar înainte să-i fi analizat complet. Cealaltă cale, „şoseaua principală", trece prin cortexul senzorial şi beneficiază de o prelucrare mai extinsă.

Esenţial pentru emoţia imediată4 (spre deosebire de sentimentul conştient) de frică este *nucleul amigdalian* – o mică structură în formă de migdală din lobul cerebral temporal (în limba latină, *amygdala* înseamnă „migdală"). LeDoux a utilizat chimicale care colorează neuronii pentru a urmări circuitele cerebrale ale şobolanului şi a cartografia calea precisă de transmitere a fricii. Acesta reprezintă, un semnificativ pas înainte faţă de metoda simplei „extrageri a deprinderilor din şobolani", ce caracterizase studiile mult anterioare, pur comportamentale. LeDoux a descoperit că de îndată ce un şobolan dă prima alarmă (în forma unor ţipete ascuţite), semnalul recepţionat de ceilalţi şobolani se duce direct de

la talamusul lor senzorial (materia cenuşie bilobată ce transferă semnalele senzoriale) la nucleul amigdalian. La rândul lui, aceasta din urmă, recepţionând un stimul puternic, declanşează întregul sistem defensiv. Reacţia posibilă este de două feluri: animalul fie îngheaţă în loc (pentru a nu fi văzut), fie inima începe să-i bată cu putere, iar hormonii îi inundă sistemul circulator. Aceşti hormoni ajută la declanşarea acţiunii adecvate – şobolanul fuge, ca să-şi scape viaţa, sau se pregăteşte să lupte cu prădătorul.

Nucleul amigdalian pare să guverneze reacţiile dictate de frică la toate speciile cu o structură similară, inclusiv la oameni. Cercetarea a arătat că o femeie cu nucleul amigdalian lezat şi-a pierdut complet capacitatea de a detecta şi de a recunoaşte orice expresie facială înfricoşată.

Clar, mecanismul „rapid şi murdar" declanşează câteva alarme false şi atacuri inutile de panică. Totuşi, talamusul trimite informaţii şi la centrul de prelucrare mai precisă a semnalelor – cortexul senzorial. Acest drum mai lent furnizează în cele din urmă nucleului amigdalian o reprezentare mai fiabilă a stimulului real, oprind animalul să reacţioneze exagerat.

Aşa cum tocmai am văzut, simpla observare a simetriei bilaterale ar putea uneori porni sirena care pune în mişcare întreaga maşinărie (cognitiv inconştientă) a fricii. Simetria bilaterală poate, de asemenea, acţiona, în diferite împrejurări, ca un mecanism în sine, de apărare împotriva prădătorilor. Multe animale (numite *animale aposematice)* utilizează diverse semnale, cum ar fi mirosuri, sunete şi culori distinctive, pentru a-şi preveni prădătorii că sunt periculoase sau dezgustătoare. Unii fluturi, spre exemplu, au pete mari care în repaus sunt ascunse5, dar devin vizibile atunci când este detectat un prădător. Apariţia bruscă a unei perechi de „ochi" zăpăceşte adeseori prădătorul, îndeajuns pentru a-i da fluturelui ocazia să scape. Dintre diversele semnale de avertizare vizuală pe care le utilizează fiinţele aposematice, cele bazate pe simetria bilaterală s-au

dovedit a fi cele mai eficace. În particular, fascinantele experimente care au expus ciugulelii păsărilor de curte „fluturi” artificiali de hârtie cu diferite modele de aripi au arătat că valoarea protectoare a unor asemenea avertismente vizuale este sporită de elemente decorative mari şi simetrice. În aceste experimente, efectuate de cercetătorii suedezi6, fluturii de hârtie (figura 99) erau fixaţi sub capacele de plastic ale unor vase Petri, în care erau presărate fărâmături de hrană. La fiecare nouă testare, se combinau 45 de fluturi negri monocromi cu fărâmături apetisante şi 45 de fluturi aposematici cu fărâmături neapetisante, tratate cu chinină. Fluturii aposematici aveau desene de avertizare fie simetrice, fie asimetrice, iar fiecare grup de păsări de curte era expus la un tip (simetric mare, simetric mic sau asimetric) de fluturi de acest gen, neapetisanţi. Rezultatele experimentale au sugerat că asimetria desenelor diminuează eficacitatea semnalelor aposematice. Cercetătorii au concluzionat că aceasta se datora, probabil, faptului că abaterile de la simetrie provoacă o reacţie neurală mai slabă, făcând ca, pentru păsările de curte, semnalul să fie mai dificil de detectat, de memorat şi de asociat cu inapetenţa. Aceste cercetări şi multe altele, similare, conduc la o concluzie interesantă: Speciile vânate posedând colorit de avertizare ar putea fi supuse unei selecţii naturale care favorizează desenele simetrice bilaterale mari.

Omul de stat şi filosoful britanic Edmund Burke7 (1729 – 1797) spunea odată că „nicio pasiune nu deposedează atât de eficace mintea de toate puterile ei de a acţiona °i de a raţiona ca frica”. Acest lucru este probabil adevărat, dar reacţia inconştientă cognitivă la frică, declanşată ocazional de detecţia simetriei, poate uneori fi exact ceea ce trebuie pentru a evita un prădător. Similar, în arena semnalizării, etalarea provocatoare a unor semnale aposematice simetrice furnizează, în unele cazuri, un scut protector împotriva prădătorilor potenţiali.

Rolul simetriei în ambele tipuri de mecanisme de evitare a prădătorilor (detecţie şi semnalizare) este unul

negativ. Simetria acţionează, într-un anume sens, ca un agent repulsiv dacă este foarte evidentă. Dar oare poate ea provoca şi un stimul încurajator, îmbietor? Procesul alegerii partenerului arată că, într-adevăr, poate – mai mult chiar decât ne-am aştepta.

Păsările o fac, albinele o fac, chiar şi puricii dresaţi o fac

Evitarea prădătorilor şi alegerea hranei potrivite sunt factori foarte importanţi pentru supravieţuire. Din perspectiva genelor, totuşi, supravieţuirea nu-i decât un mijloc de atingere a unui scop. Chiar dacă toţi oamenii au implementat cu succes ideile din cartea umoristului George Bums8 *Cum să trăim 100 de ani sau mai mult,* acest lucru n-ar fi de absolut niciun folos, din punctul de vedere al genelor, dacă ei n-ar avea şi urmaşi. Reproducerea şi transmiterea lor la generaţia următoare sunt esenţiale pentru gene. Aşa cum a formulat această idee biologul şi autorul Richard Dawkins, „organismul nu-i decât un sistem genetic de producere a tot mai multe gene”.

La unele specii, indivizii se pot reproduce singuri – ei se divizează în două şi fiecare parte devine o nouă creatură. Natura a decis, clar, că acest proces asexuat este mai puţin amuzant, căci mai mult de 1, 7 milioane de specii de pe pământ se angajează în reproducere sexuată. Mai serios vorbind, reproducerea sexuată trebuie să ofere speciilor un beneficiu adaptiv, altminteri n-ar fi aşa de preponderentă. Evidenta diferenţă (între modalitatea sexuată şi cea asexuată) este că descendenţii rezultaţi din reproducerea sexuată pot beneficia de schimburile de gene dintre părinţi. Noua şi ameliorata compoziţie genetică poate limita pagubele cauzate de mutaţiile dăunătoare şi poate spori adaptarea descendenţilor. Pentru a exploata pe deplin avantajele sexului, trebuie selectat cel mai potrivit partener. „Cel mai potrivit” din punct de vedere genetic înseamnă unul ale cărui caracteristici să crească şansele de supravieţuire şi de reproducere ale descendenţilor. Aceasta se traduce în două trăsături principale: gene de

înaltă calitate (în ceea ce priveşte adaptarea) şi capacitate de a oferi grijă părintească. Aici mă voi concentra numai asupra celei dintâi, fiindcă este cea mai direct legată de simetrie.

Descendentul moşteneşte 50% din genele fiecărui părinte. Drept consecinţă, împerecherea cu un partener cu gene „bune" este vitală. De acest aspect şi-a dat seama şi Darwin, care a recunoscut că, pe lângă faptul că este călăuzită de selecţia naturală pentru supravieţuire, în evoluţie contează şi selecţia sexuală9, prin alegerea partenerului. Aici, totuşi, intervine principala enigmă. Clar, strămoşii noştri nu erau echipaţi cu truse de testare ADN, aşa încât, cum putea fiecare individ evalua potrivirea genetică a potenţialului partener? Chiar şi cu facilităţile de testare ADN devenite accesibile astăzi, mulţi oameni tot nu se vor baza pe ele pentru alegerea iubiţilor aşa cum nu o vor face nici păsările-văduvă cu coadă lungă sau păuniţele. Dar o completă înţelegere a procesului de alegere a partenerului cere dezvăluirea tuturor misterelor atracţiei sexuale, ceea ce este clar dincolo de scopul prezentei cărţi. Dintre numeroasele aspecte interesante ale acestei probleme, nu le voi discuta decât pe cele legate de simetrie.

Deci, cum se aleg partenerii? Ca principiu de bază, atât animalele, cât şi oamenii caută (printre altele) nişte indicatori ai potrivirii, cât mai demni de încredere. Se uită după acele caracteristici biologice care au evoluat anume pentru a o semnaliza şi avertiza. De remarcat că, pe măsură ce indicatorii potrivirii au evoluat, s-a dezvoltat şi capacitatea senzorială de detectare şi recunoaştere a lor. Coloritul roşu ca focul al fundului unui babuin ar fi inutil dintr-o perspectivă evoluţionistă dacă nu s-ar fi dezvoltat concomitent şi o preferinţă pentru fundurile roşii, în sistemul de percepţie a potenţialilor parteneri. Trăsăturile masculilor şi preferinţele femelelor ar evolua simultan până la caracteristici şi mai extreme câtă vreme beneficiul împerecherii nu este echilibrat de o forţă de selecţie naturală îndreptată în sens opus. Multe cercetări

sugerează că unul dintre cei mai buni indicatori de potrivire este simetria bilaterală. Pentru a aprecia acest concept, să examinăm cazul particular, adeseori discutat, al cozii păunului. O coadă mare, perfect simetrică, anunţă lumii sonor şi clar: „Proprietarul meu n-are paraziţi şi nu a suferit afecţiuni perturbatoare". Paraziţii păsărilor sunt atât de răspândiţi şi suferă mutaţii atât de bruşte, încât orice exemplar care-i posedă trebuie să aibă gene foarte sănătoase. Un păun infestat cu paraziţi va avea o coadă asimetrică, murdară. Cu alte cuvinte, o simetrie perfectă poate fi un indiciu clar al stabilităţii evolutive. Chiar şi deviaţiile relativ mici de la perfecta simetrie (numite *asimetrii fluctuante)* pot dezvălui gradul de adaptare al genomului la mediul ambiant.

Legătura dintre alegerea partenerului şi calitatea genetică a fost puternic susţinută în anul 1982, printr-o importantă lucrare a biologilor William Hamilton şi Marlene Zuk10. Cercetătorii au examinat paraziţii din sângele unor păsări din America de Nord şi relaţia potenţială dintre aceştia şi aspectul exterior. Rezultatele au sugerat că, într-adevăr, animalele îşi aleg partenerii în funcţie de rezistenţa genetică la maladii, orientându-se după caracteristicile care le oglindesc starea de sănătate. Alte experimente, cu rândunele de casă11 (efectuate de biologul suedez Anders Moller) şi cu cintezoi-zebră12 (efectuate de biologii britanici John Swaddle şi Innes Cuthill), au arătat, de asemenea, că femelele utilizează simetria drept criteriu de alegere al partenerului.

O sensibilitate corespunzătoare la modelele simetrice trebuia să se dezvolte în sistemul de recepţie a semnalelor cu asimetrie fluctuantă. Biologii Randy Thornhill, Andrew Pomiankowski şi colegii lor au propus ipoteza că preferinţele pentru simetrie au evoluat la animale tocmai din cauza faptului că gradul de simetrie al semnalelor este un indicator al calităţii celui care le emite. Simetria nu poate fi contrafăcută. Ne putem întreba de ce animalele vor în primul rând să-şi dezvolte o podoabă atât de mare şi de dificil de manipulat cum este coada la păun. Biologul

israelian Amotz Zahavi13 a dat un răspuns foarte plauzibil, ce a devenit cunoscut sub denumirea de *principiul handicapului.* Ideea lui Zahavi le poate părea unora foarte simplă: Costul ridicat (în termeni de dificultate de creştere şi de manipulare) al podoabei sexuale este cel care indică primul, cu mare certitudine, potrivirea cu un anumit partener. Dacă o femeie vă spune la telefon că vă iubeşte, e foarte drăguţ din partea ei, dar, dacă îşi foloseşte ultimul bănuţ pentru a zbura tocmai din Japonia ca să vă vadă, demonstrează un nivel mult mai profund de implicare în relaţia voastră. Podoabele scumpe, care se întreţin greu, sunt de efect deoarece dau dovada unor calităţi (ale posesorului) ce inspiră mai multă încredere unui potenţial partener. Masculii de calitate superioară se presupune că-şi pot permite să cheltuiască suplimentul de energie pentru astfel de ţinute extravagante.

Nu toţi sunt de acord că preferinţa pentru simetrie este neapărat o consecinţă a faptului că simetria ar fi un indicator al potrivirii. Într-un interesant articol ştiinţific, biologul suedez Magnus Enquist şi inginerul britanic Anthony Arak14 au propus ipoteza că preferinţele pentru simetrie ar putea să se manifeste doar din cauză că obiectele simetrice sunt mai uşor de recunoscut decât cele asimetrice, indiferent de orientarea lor. La urma urmei, una dintre problemele cu care se confruntă animalele este nevoia de a recunoaşte obiecte cu diferite orientări, localizate în diverse puncte ale câmpului lor vizual. Orice ajutor pe care sistemul de percepţie îl poate căpăta va fi apreciat şi probabil preferat, rezultatul fiind o înclinaţie senzorială pentru simetrie. Enquist şi Arak au utilizat reţele neuronale artificiale ca modele de sisteme de recunoaştere. Reţelele neuronale sunt sisteme de calcul bazate pe principiile de funcţionare cerebrală, capabile să înveţe din experienţă pentru a-şi ameliora performanţa. În experimentele efectuate de Enquist şi Arak, preferinţa pentru simetrie era, hotărât lucru, consecinţa unei explorări senzoriale – a nevoii de recunoaştere a semnalelor emise de potenţialul partener –, neavând nicio

legătură cu evaluarea calităţii genetice. Rezultate similare a obţinut într-un experiment separat, cu o reţea neuronală15 artificială, biologul Rufus Johnstone de la Cambridge. Concluzia a fost, din nou, aceea că, la împerechere, preferinţele pentru simetrie se dezvoltă ca un simplu subprodus al selecţiei pentru recunoaşterea partenerului, nu datorită relaţiei dintre gradul de asimetrie fluctuantă °i calitatea partenerului.

Din perspectiva acestei discuţii, nu contează dacă, în regnul animal, preferinţa pentru simetrie este rezultatul căutării calităţilor reprezentanţilor de sex opus sau al recunoaşterii instantanee a partenerului potrivit. Preferinţele pentru simetrie s-au dezvoltat, probabil, din diverse motive. Important este doar faptul că *există o preferinţă pentru simetrie* – în cazul animalelor, simetria joacă un rol crucial în selecţia partenerului.

Ce are dragostea de a face cu asta?

Oamenii sunt animale foarte complexe. Mixtura inseparabilă de psihologie evoluţionistă, cultură, apartenenţă etnică, credinţe, interese şi trăsături personale atrage în cazul fiinţelor umane. Şi totuşi, undeva adânc, dorinţa genelor de a procrea reprezintă una dintre forţele motrice cele mai puternice, cu mare influenţă asupra minţii umane. În căutarea unui partener sănătos şi fertil, judecata nu ne este programată altfel decât cea a strămoşilor noştri din Epoca de Piatră. Frumuseţea poate influenţa ochiul privitorului, dar, după expresia psihologului evoluţionist David Buss16, „ceilalţi ochi şi minţile din spatele ochilor sunt rezultatele modelării milioanelor de ani de evoluţie umană”. Sensul dat noţiunii de „atrăgător” este determinat în mare măsură de un mecanism adaptiv de luare a deciziei, care a evoluat, cel puţin parţial, în scopul selectării unui partener.

Dacă socotiţi că atractivitatea este neimportantă, mai gândiţi-vă. Anna Kurnikova s-a clasat cam a şaptezecea în campionatele de tenis din anul 2003 şi, totuşi, ea a câştigat, din reclame, milioane de dolari mai mult decât jucătoare aflate semnificativ mai sus în clasamente. În

cazul în care vă întrebaţi de ce, iată un indiciu – a apărut de două ori pe coperta revistei *Maxim.* Producătorii programului *20/20* de la ABC News au făcut un experiment, pentru a determina cât de frecvent se bucură de tratament preferenţial bărbaţii şi femeile atrăgătoare. Într-un test efectuat în Atlanta, două actriţe îmbrăcate la fel au fost puse să stea neajutorate fiecare lângă o altă maşină rămasă fără benzină. Pentru cea cu înfăţişare obişnuită, câţiva pietoni s-au oprit, dar numai ca să-i indice cea mai apropiată benzinărie. Pentru actriţa mai atrăgătoare, nu mai puţin de o duzină de maşini au oprit, iar şase şoferi sau şi dus să aducă benzina!

Într-un al doilea experiment, echipa de la *20/20* a pus doi bărbaţi să facă cereri de angajare. Cei doi candidaţi aveau educaţie şi experienţă de muncă similare, chiar şi micile deosebiri din CV-urile lor fiind deliberat netezite. Exista, totuşi, o diferenţă observabilă între cei doi bărbaţi – unul era foarte atrăgător, în vreme ce celălalt avea o înfăţişare ceva mai ternă. Credeţi sau nu, angajatorul era dornic să-l vadă pe bărbatul atrăgător întorcându-se cât mai curând pentru o zi de probă, în vreme ce bărbatul obişnuit la înfăţişare a căpătat un răspuns gen „nu ne sunaţi, vă sunăm noi”.

A fost identificată până şi zona din creier17 ce răspunde de frumuseţe. Cercetătorii Hans Breiter, Nancy Etcoff, Itzhak Aharon şi colaboratorii lor au apelat la tehnica imagisticii cu rezonanţă magnetică pentru a investiga activitatea cerebrală a bărbaţilor atunci când li se arată fotografii de femei deosebit de atrăgătoare. Ei au constatat că frumuseţea excită aceeaşi zonă din creier ca şi hrana (atunci când persoana este flămândă) sau alţi stimuli ce au legătură cu dependenţa (de pildă, ruleta în cazul unui jucător împătimit).

Mult timp s-a presupus că, în ce priveşte frumuseţea, criteriile sunt în mare măsură culturale şi, de aceea, mai curând învăţate decât înnăscute. Studiile mai recente ale psihologului Judith Langlois de la Universitatea din Texas18, Austin, au răsturnat total această concepţie

convenţională. Langlois a cerut mai întâi unor adulţi să clasifice după atractivitate fotografiile unor femei atât albe, cât şi negre. Apoi, fotografiile au fost arătate în perechi (una mai atrăgătoare, alta mai puţin) unor copii mici, din două grupe de vârstă – de două-trei luni şi de şase-şapte luni. S-a găsit că bebeluşii din ambele grupe priveau mai îndelung chipurile clasificate ca fiind atrăgătoare. Similar, s-a constatat că prichindeii de un an se jucau semnificativ mai mult timp cu păpuşile drăguţe.

Alte studii au verificat cum variază gusturile în funcţie de tipul de civilizaţie. Psihologul Michael Cunningham a găsit 19 un incredibil consens al părerilor bărbaţilor de rase diferite în ceea ce priveşte atractivitatea facială a femeilor de rase diferite. Acordul persista chiar şi dacă se luau în considerare diverse grade de expunere la mass-media occidentală. Studiile care au depăşit frontierele geografice şi etnice20 (de exemplu, cu bărbaţi chinezi, indieni, sud-africani şi nord-americani) au dat rezultate foarte asemănătoare. Luate împreună, toate aceste studii par să indice că există criterii universale de atractivitate şi că farmecul chipurilor atrăgătoare se adresează multor inimi, el manifestându-se de la vârste fragede şi fiind acelaşi în toate culturile. Detectorii de frumuseţe ar putea să nu fie chiar înnăscuţi, dar este posibil ca mintea omenească să aibă reguli de bază înnăscute, de la care se construiesc şabloane de atractivitate.

Poate că există o înclinaţie spre adevărate discriminări făcute pe baza înfăţişării, dar ce găsesc, în fond, atrăgător bărbaţii şi femeile21? Biologul Randy Thornhill, psihologul Steve Gangestad şi etologul Karl Grammer au acumulat un mare volum de dovezi, care arată că simetria este un factor-cheie. Thornhill, Gangestad şi colegii lor au măsurat simetria la circa o mie de studenţi, atât a chipului (dispunerea colţurilor ochilor, pupilelor, pometţilor, liniei gurii şi aşa mai departe), cât şi a corpului (lăţimea piciorului, lăţimea mâinii, lăţimea cotului, lungimea urechii, lungimea degetului al doilea şi al

cincilea şi aşa mai departe), pentru a elabora un indice general al asimetriilor. Atunci când Thornhill şi Gangestad au corelat aceste date cu evaluări independente ale atractivităţii, au constatat că persoanele mai puţin simetrice cât priveşte corpul sau faţa erau considerate ca fiind mai puţin atrăgătoare.

Printr-un studiu separat, Grammer şi Anja Rikowski22 au descoperit că simetria are legătură până şi cu mirosul natural atrăgător al trupului. Acesta a implicat folosirea a 16 bărbaţi şi 19 femei, fiecare subiect fiind pus să poarte un tricou timp de trei nopţi consecutive, în condiţii controlate. Imediat după utilizare, tricourile au fost îngheţate şi, exact înainte de evaluarea mirosurilor, au fost reîncălzite până la temperatura corpului uman. Apoi 15 subiecţi de sex opus au trebuit să-l stabilească pe cel mai sexy, făcând evaluările pe o scară de şapte puncte. În paralel, 22 de alţi oameni – atât bărbaţi, cât şi femei – au apreciat atractivitatea subiecţilor, după nişte fotografii, şi a fost realizat un indice al simetriilor acestora, stabilit pe baza a şapte trăsături. Rezultatele au arătat că puterea de atracţie exercitată de chip şi mirosul trupesc sexy merg mână în mână în cazul subiecţilor de sex feminin. Mai mult decât atât, bărbaţii consideră că cele cu trup mai simetric, miros şi mai sexy. Interesant, femeile sunt de părere că mirosurile bărbaţilor simetrici sunt tentante numai atunci când ele se află în perioada cea mai fertilă a ciclului menstrual.

Cel mai surprinzător poate, Thornhill şi Gangestad au descoperit o relaţie între simetrie şi orgasm23. Cercetătorii raţionau că, orgasmele reprezentând o adaptare necesară asigurării de gene sănătoase pentru urmaşi, femeile ar trebui să se bucure de mai multe dacă au parteneri mai simetrici. Conducând un studiu făcut pe 86 de cupluri de studenţi heterosexuali, ei au ajuns la concluzia că, într-adevăr, femeile ai căror parteneri erau mai simetrici cunoşteau o frecvenţă semnificativ mai mare de orgasme. Oarecum neaşteptat, cercetătorii n-au găsit nicio corelaţie între orgasm şi nivelul de ataşament sau

experienţa sexuală a partenerilor. Înainte ca vreo cititoare să se repeadă să-şi găsească un iubit simetric, aş dori să observ că studiile mai arată ceva: că cei mai simetrici bărbaţi investesc cel mai puţin în relaţiile lor şi-şi înşală cel mai des partenerele. Orgasmul nu prea pare să aibă de-a face cu aspectul, ci mai degrabă cu evaluarea rece din Epoca de Piatră, a înzestrării genetice a partenerului.

O cercetare independentă efectuată de psihologii24 Todd Shackelford şi Randy Larsen a arătat că simetria feţei umane se corelează foarte bine cu alţi indicatori de potrivire, atât din punct de vedere fiziologic, cât şi psihologic. În particular, s-a constatat că bărbaţii cu feţe asimetrice sunt mai predispuşi la depresie, anxietate, dureri de cap, dificultăţi de concentrare şi chiar la disfuncţii digestive. S-a descoperit, de asemenea, că femeile cu asimetrie facială au o sănătate mai şubredă şi sunt mai înclinate spre instabilitate emoţională şi depresie. Mai mult, simetria este şi un indiciu al tinereţii, căci cu cât îmbătrâneşte cineva, cu atât mai asimetrică îi devine faţa.

Tabloul care ne apare este foarte sugestiv. Exact aşa cum în regnul animal procesul de alegere a partenerului pare să fi identificat simetria ca un bun indicator al potrivirii, şi pentru fiinţele omeneşti, simetria bilaterală a fost pusă pe picior de egalitate cu stabilitatea dezvoltării, tinereţea şi rezistenţa la diverşi agenţi patogeni ce slăbesc organismul. Rezultatul, în termeni de „magnetism" animal/uman, era inevitabil – cuvintele *simetric* şi *atrăgător* au devenit aproape sinonime.

Nu vreau să rămâneţi cu impresia că simetria este singura calitate ce afectează atractivitatea. Psihologul Judith Langlois şi colaboratorii ei subliniază că cel mai atrăgător este caracterul comun al trăsăturilor feţei. Ea a generat pe calculator combinaţii25 de patru, opt, 16 şi 32 de chipuri. Spre surpriza ei, a constatat că feţele compuse erau judecate în general ca fiind mai atrăgătoare decât cele individuale, din care erau obţinute primele. Combinaţiile de 16 feţe erau considerate mai reuşite decât cele de patru şi de opt feţe, iar combinaţia de 32 de feţe a

fost găsită cea mai atrăgătoare. Deşi chipurile obţinute prin combinaţii tind, prin construcţie, să fie mai simetrice, Langlois a descoperit că, şi după ce efectele simetriei au fost controlate, caracterul comun era încă judecat a fi atrăgător. Aceste constatări pledează în favoarea unui anumit nivel de prototipizare din minte, fiindcă acest caracter comun ar putea fi foarte bine cuplat cu un prototip.

Savantul cognitiv David Perrett26 de la Universitatea din St. Andrews, Scoţia, a ajuns la concluzia că feţele pe care le găsim atrăgătoare sunt adeseori îmbietoare fiindcă seamănă cu ale noastre sau cu ale părinţilor noştri. Intrigat de acest rezultat, l-am sunat în vreme ce făceam o vizită la St. Andrews, pentru a afla de ce credea el că era vorba de o alegere adaptivă. Perrett a subliniat mai întâi că, pentru ca mintea să fie în stare să-şi aducă o contribuţie la selecţia partenerului, trebuie să existe un sistem de învăţare. „Mai exact", a adăugat, „mintea are nevoie de capacitatea de a se fixa pe lucruri relevante din imediata ei apropiere – ca simetria sau caracterul comun. Găsirea unor trăsături atrăgătoare la cineva care seamănă cu tine sau cu părinţii tăi poate avea sens, căci familia ta a reuşit deja să supravieţuiască, străbătând calea evoluţiei".

Alţi factori ce influenţează selecţia partenerului sunt legaţi de fertilitate, resurse şi capacitatea/disponibilitatea de a juca rol de părinte. Spre exemplu, studiile efectuate de psihologul Devendra Singh arată că, aproape universal, bărbaţii preferă femei cu forma clasică27 de „clepsidră", caracterizată de un raport talie-sold de 0, 7. Motivul adaptiv pe care se bazează această preferinţă poate fi faptul că, după cum s-a descoperit, acest raport este şi un bun indicator de fertilitate. O preferinţă posibil legată de aceasta s-a găsit şi pentru simetria pieptului. Alte sondaje de opinie spun că femeile preferă în general parteneri ceva mai în vârstă decât ele, probabil din cauza preferinţei lor pentru bărbaţi cu resurse.

Deşi succintă, descrierea prezentată în acest capitol, a rezultatelor şi ideilor din psihologia evoluţionistă, pare

să conducă la o concluzie clară. Indiferent care ar fi cauza, selecţia partenerului, intuirea acestuia, evitarea prădătorilor sau o combinaţie a acestor trei, *minţile noastre sunt atrase de simetrie şi sunt fin acordate pentru a o detecta*. Întrebarea dacă simetria este cu adevărat fundamentală pentru universul însuşi sau doar pentru univers, aşa cum îl percep fiinţele umane, devine, deci, deosebit de acută.

Chiar o fi guvernând simetria?

Să ne imaginăm ce s-ar fi întâmplat dacă ochiul omenesc ar fi fost sensibil numai la lumina albastră. Înainte de dezvoltarea oricărui alt detector de lumină, savanţii ar fi conchis, natural, că orice lucru din univers este albastru. Similar, o companie de deratizare care produce capcane lungi de opt centimetri ar putea concluziona că toţi şoarecii sunt mai scurţi, din cauză că cei prinşi ar avea această lungime maximă. Am dat doar două exemple simple de *efecte de selecţie* observaţionale – filtrări, prin intermediul preconcepţiilor nerecunoscute, ale realităţii fizice fie în metodele de observaţie, fie în instrumentele de observare. Ar putea introduce preferinţa minţilor umane pentru simetrie o tendinţă similară în percepţia noastră a ceea ce este cu adevărat fundamental în univers?

Trebuie să accentuez din nou că mă concentrez asupra simetriilor legilor naturii şi asupra descrierii lor utilizând teoria grupurilor, nu asupra simetriei oricăror structuri particulare din natură. Cristalele perfecte sunt exemple ale acestora din urmă. Ele arată exact la fel dacă ne mişcăm în interiorul cristalului, pe anumite distanţe, în diverse direcţii. Cristalografia este ştiinţa studierii structurilor şi proprietăţilor ansamblelor compuse dintr-un număr mare de unităţi identice. La rândul lor, unităţile pot fi constituite din atomi, molecule sau, într-un context mai abstract, chiar şi din secvenţe de cod-masină. O întrebare tipică în cristalografie ar putea fi următoarea: Cum poate fi aranjat în spaţiu un număr mare de unităţi identice astfel încât fiecare unitate să „vadă” împrejurimi identice? Teoria

grupurilor este pâinea şi untul cristalografiei – încercările de a răspunde la întrebarea de mai sus au avut drept rezultat o demonstraţie care a spus că nu există decât 230 de tipuri diferite de grupuri de simetrie spaţială (exact aşa cum catenele liniare nu au decât 7 grupuri diferite de simetrie; vezi Capitolul 7).

Principiile simetriei se mai manifestă şi în structura unei diversităţi de molecule şi organisme biologice, de la proteine cristalizate şi ADN până la virusuri. Toate aceste simetrii sunt evident importante, căci reprezintă sisteme stabile (de energie minimă), care la rândul lor duc la apariţia mineralelor şi fiinţelor vii. Totuşi acestea nu sunt simetrii subiacente legilor de bază ale naturii.

Atunci când vine vorba de legi, nu există absolut nicio îndoială că simetria şi teoria grupurilor sunt concepte extrem de *utile.* Fără introducerea simetriei şi a limbajului grupurilor în fizica particulelor, descrierea particulelor elementare şi a interacţiunilor lor ar fi fost un coşmar încâlcit. Grupurile „adulmecă" cu adevărat ordinea şi identifică formele, ca niciun alt instrument matematic.

Într-un interviu din 198528, matematicianul Andrew Gleason de la Harvard spunea: „Desigur că matematica trebuie să dea rezultate în fizică! Ea este proiectată să discute exact situaţia cu care se confruntă fizica; şi anume, că pare să existe ceva ordine – hai să descoperim despre ce e vorba". În plus faţă de utilitatea sa, simetria elimină redundanţele din descrierea sistemelor, fie ele reale sau abstracte. Spre exemplu, să ne imaginăm că un anumit sistem este reprezentat simbolic de următorul şir de caractere:

XYZXYZXYZXYZXYZ.

Putem utiliza simetria de translaţie a simbolurilor pentru a elimina redundanţa şi a reduce descrierea la forma mult mai compactă 5* (XYZ), citită sub forma „repetă subsirul XYZ de cinci ori". Similar, în şirul:

UVWXYZZYXWVU

putem utiliza simetria de reflexie pentru a reduce şirul la SIM (UVWXYZ), unde operatorul *SIM* indică acest

tip de reflexie. Întrebarea reală este, de aceea, dacă simetria e încorporată în structura naturii sau nu face decât să reprezinte o modalitate aflată la îndemâna noastră, pentru purtarea unui dialog cu realitatea fizică. Întrebarea nu-i uşoară. Pentru anumiţi paşi făcuţi pe drumul ce ne va duce spre teoria definitivă a universului, simetria pare a fi mai importantă decât pentru alţii. Simetria de bază dintre oricare doi observatori, ce stă la temelia relativităţii, spre exemplu, este o simetrie exactă, care pare într-adevăr să caracterizeze natura. Pe de altă parte, unul dintre primele modele ale nucleelor atomice, numit *modelul lui* Elliott29, era descris de o simetrie (şi de un grup asociat), deşi se ştia că acea simetrie nu este decât aproximativă şi aproape cert nefundamentală.

O posibilă problemă, ridicată de unele dintre simetriile gauge presupuse a ne oferi baza pentru modelul standard, este cea a *ruperii simetriei.* Daţi-mi voie să explic pe scurt acest concept. Să examinăm vederea de sus a mesei pregătite pentru cină din figura 100, unde farfuriile mici sunt pentru pâine.

Toate scaunele din jurul mesei sunt identice, iar din punctul de vedere al oricărei persoane aşezate pe ele, stânga şi dreapta sunt de nedistins. Configuraţia este, de aceea, simetrică atât faţă de rotaţii (cu multipli întregi de 360°: 8 = 45°), cât şi faţă de reflexii (în jurul a opt axe). Însă îndată ce pâinea este servită şi prima persoană o pune pe o farfurioară (la stânga sa, mi se spune că-i normal), simetria este „ruptă spontan”. Stânga şi dreapta devin distincte, iar invarianţa rotaţională se pierde.

Amintiţi-vă că în teoria electroslabă, electromagnetismul şi forţa nucleară slabă sunt două feţe ale aceleiaşi monede (Capitolul 7). Purtătorii de forţă – fotonul, W şi Z – sunt interschimbabili. O întrebare care se ridică imediat este de ce au aceste două forţe manifestări atât de diferite (de exemplu, una este de o sută de mii de ori mai mare decât cealaltă) în universul de azi? Modelul standard aruncă vina asupra ruperii simetriei. Conform cu cel mai popular scenariu, puţin după momentul în care

universul nostru a luat fiinţă (eveniment pe care-l numim Big Bang), exista o simetrie perfectă între electromagnetism şi forţa slabă. La enormele temperaturi ce caracterizau această fază, fotonii şi particulele W şi Z erau cu adevărat de nedeosebit. Pe măsură ce universul s-a extins şi s-a răcit, totuşi, el a trecut printr-o tranziţie de fază – nu mult deosebită de îngheţarea unui lichid – în care s-a produs fenomenul de rupere a simetriei. Se presupune că acest lucru s-a petrecut pe când universul avea vechimea unei infime fracţiuni (circa 10 – 12) dintr-o secundă. Analogia cu lichidul poate fi, de fapt, dusă un pas mai departe. Un lichid arată la fel oricum l-ai turna – nu există o direcţie preferată. Această simetrie se pierde, totuşi, dacă lichidul îngheaţă. Structura cristalină formată are unele axe preferate. Se crede că ruperea simetriei dintre forţele electromagnetice şi cele nucleare slabe, ce era asociată cu „îngheţarea" cosmică, este cea care a generat diferenţele pe care le observăm astăzi. Particulele W şi Z au fost înzestrate cu mase, în vreme ce fotonul a rămas fără masă. Sfera de acţiune a forţei nucleare slabe este limitată numai la distanţe de ordinul mărimii nucleelor, din cauza purtătorilor săi greoi, înceţi.

Pentru un neiniţiat, descrierea de mai sus poate suna un pic ca un basm plin de fantezie. O astfel de persoană s-ar putea gândi că fizicienii particulelor au inventat o simetrie care se presupune că ar caracteriza forţele de bază ale naturii, iar atunci când s-a constatat că universul din zilele noastre nu ascultă de acea simetrie, au născocit un foarte convenabil scenariu al ruperii simetriei. În realitate, teoria este mult mai solidă decât sugerează descrierea de mai sus. Multe dintre predicţiile modelului standard au fost confirmate spectaculos pe cale experimentală (Capitolul 7). Şi mai important, foarte curând vor deveni realizabile nişte teste experimentale pentru întreaga schemă a ruperii simetriei. În acelaşi mod în care temperaturile de îngheţare30 ale lichidelor pot fi estimate pe baza maselor atomice şi energiilor ce ţin atomii împreună, parametrii cunoscuţi ai modelului

standard pot fi utilizaţi pentru a estima energia în punctul de rupere a simetriei. Energiile cerute sunt fie deja realizabile într-un mare accelerator de particule – ca Tevatronul Laboratorului Fermi al Universităţii din Chicago –, fie vor putea fi obţinute cu Large Hadron Collider de la CERN, cam prin 2007. În cel mai rău caz, se speră că aceste experimente ne vor spune doar că ideile teoretice ale ruperii simetriei sunt pe calea cea bună31. Dar aceleaşi experimente ar putea testa şi predicţiile supersimetriei. Amintiţi-vă că, dacă lumea reală ascultă de supersimetrie, se aşteaptă să fie descoperite o groază de noi particule. Electronul cu spin 1/2 trebuie să aibă un partener cu spin 0 (numit „selectron”), fotonul de spin 1 trebuie să aibă un partener „fotino” cu spin 1/2, iar parteneri similari se prezice că există pentru fiecare particulă din modelul standard.

Mai există şi un alt motiv pentru care se impune oarecare precauţie înainte de a proclama simetria drept principala forţă motrice în geneza şi transformările universului, iar teoria grupurilor drept limba sa primară. Acest motiv poate fi cel mai bine demonstrat utilizând exemplul regulilor de căsătorie-înrudire Kariera. Nu uitaţi că s-a demonstrat că regulile acestui trib de aborigeni formează un grup, cu aceeaşi structură ca şi faimosul cvadrigrup al lui Klein. Este neîndoielnic, totuşi, că membrii tribului Kariera nu intenţionau ca regulile lor să formeze vreo structură matematică particulară. Ca atare, suntem confruntaţi cu o situaţie în care am identificat un instrument matematic ce procură o descriere perfectă a realităţii, dar în care adevăratele motive pentru acea realitate rămân necunoscute. Motivaţia reală care i-a condus pe membrii tribului Kariera să aleagă acest set particular de reguli de conduită ar putea avea relativ puţin de-a face cu ordinea pe care am recunoscut-o în el, deşi o analiză mai aprofundată ar putea dezvălui că aceste reguli asigură o societate stabilă.

Pe când mă chinuia întrebarea privitoare la importanţa reală a simetriei, m-am decis să fac un mic

sondaj de opinie printre unii dintre fizicienii şi matematicienii de vârf ai lumii, pentru a afla ce credeau ei despre acest subiect. Steve Weinberg, laureat al Premiului Nobel pentru fizică în 1979 şi unul dintre jucătorii-cheie în elaborarea modelului standard, a fost de acord că simetria ar putea să nu fie cel mai important concept în teoria definitivă a universului. El a adăugat: „Presupun că, la sfârşit, singurul principiu ferm va fi acela al compatibilităţii matematice". Ed Witten, care a primit Medalia Fields pentru matematică în 1990 şi a produs cea de-a doua revoluţie a stringurilor, a subliniat, de asemenea, că „mai există ingrediente lipsă sau necunoscute în teoria stringurilor" şi că „unele concepte, ca geometria nemanniană în relativitatea generală, s-ar putea dovedi mai importante decât simetria". Sir Michael Atiyah, care a primit Medalia Fields în 1966 şi Premiul Abel în 2004, făcea aluzie la efectele selecţiei dirijate de mintea omenească. „Noi venim să descriem natura32 cu anumiţi ochelari", spunea el. „Descrierea noastră matematică este precisă, dar pot exista modalităţi mai bune. Utilizarea grupurilor Lie excepţionale ar putea fi un instrument al gândirii noastre". Ultima frază, în special, mi-a amintit de o altă interesantă declaraţie, a faimosului matematician şi filosof Bertrand Russell (1872 – 1970): „Fizica este matematică nu din cauză că ştim atât de mult despre lumea fizică, ci din cauză că ştim atât de puţin; ceea ce noi putem descoperi sunt numai proprietăţile sale matematice". Cu alte cuvinte, Russell vedea chiar şi descrierea pe care o facem universului prin intermediul matematicii ca fiind periculos de aproape de un anume soi de efect al selecţiei. Freeman Dyson, una dintre principalele figuri din elaborarea electrodinamicii cuantice şi posesor al Premiului Wolf pentru fizică în 1981, oferea, ca întotdeauna, un punct de vedere unic: „Simt că nici măcar n-am început să înţelegem de ce este universul aşa cum este". După câteva secunde de reflecţie, el a adăugat: „Chiar şi lucrurile simple, cum ar fi capacitatea noastră de a spune dacă o linie este perfect dreaptă sau de a distinge

între un cerc şi o elipsă, sunt mistere în sine”. Privitor la simetrie, el a mărturisit că preferă să n-o considere „fundamentală”, ci „fructuoasă” atunci când se referă la ea ca fiind sursa forţelor (ca în cazul simetriilor gauge ale teoriei electroslabe). În sfârşit, Dyson observa că simetria şi teoria grupurilor au devenit elemente descriptive mult mai puternice de la introducerea mecanicii cuantice.

Deci ce putem concluziona în ceea ce priveşte rolul simetriei în structura cosmică? Umila mea părere este că nu ştim încă dacă va reieşi că ea este conceptul fundamental al funcţionării universului. Unele dintre simetriile pe care fizicienii le-au descoperit sau le-au discutat peste ani au fost recunoscute ulterior ca fiind accidentale sau numai aproximative. Alte simetrii, cum ar fi covarianţa generală din relativitatea generală şi simetriile gauge ale modelului standard, au devenit mugurii din care au înflorit noi forţe şi particule. Până la urmă, nu există absolut nicio îndoială în mintea mea că principiile simetriei ne spun câte ceva important aproape întotdeauna şi că ele pot furniza cele mai valoroase indicii şi elemente de înţelegere spre dezvăluirea şi descifrarea principiilor subiacente ale Universului, oricare vor fi fiind acestea. Simetria, în acest sens, este într-adevăr fructuoasă.

În *The Feynman Lectures on Physics,* o carte bazată pe un curs predat de faimosul fizician Richard Feynman în anul universitar 1961 – 62, autorul îşi încheie astfel discuţia33 despre simetrie:

Problema noastră este deci de a explica de unde vine simetria.

De ce este natura doar cvasisimetrică? Nimeni n-are idee de ce. Singurul lucru pe care l-am putea sugera este ceva de genul: Există o poartă în Japonia, la Neiko, despre care japonezii spun uneori că este cea mai frumoasă poartă din ţara lor; ea a fost construită într-un timp când arta chinezească avea o mare influenţă. Această poartă este foarte complicată, cu o mulţime de frontoane şi frumoase sculpturi în lemn, nenumărate coloane, capete

de dragoni, prinţi sculptaţi pe stâlpi şi aşa mai departe. Dar dacă cineva se uită cu mare atenţie, vede că, în complexul design al uneia dintre coloane, există un element sculptat cu josul în sus; altminteri, toată coloana e complet simetrică. Dacă cineva întreabă de ce este aşa, povestea spune că elementul respectiv a fost sculptat invers pentru ca zeii să nu fie geloşi pe perfecţiunea omului. Japonezii au făcut deci o eroare intenţionată, pentru ca zeii să nu fie geloşi şi să nu se mânie pe fiinţele omeneşti. Am putea inversa ideea şi gândi că adevărata explicaţie a cvasisimetriei naturii este aceasta: că Dumnezeu a făcut legile numai aproape simetrice pentru ca noi să nu fim geloşi pe perfecţiunea Sa!

Simetriile asociate cu legile naturii nu sunt singura tematică în care moştenirea lui Galois a generat şi continuă să genereze noi idei. Ne putem forma măcar o idee vagă despre această incredibilă moştenire examinând câteva simple exemple, cuprinzând o gamă de activităţi artistice şi intelectuale, de la muzică la algebra modernă.

Ce pasiuni nu poate trezi şi potoli muzica?

Titlul acestei secţiuni este luat din „Un cântec pentru ziua Sfintei Cecilia”, de faimosul poet şi dramaturg englez John Dryden (1631 – 1700). Sărbătoarea Sfintei Cecilia (22 noiembrie) păstra amintirea legendei potrivit căreia această sfântă patroană a muzicii a inventat orga. Poemul este un tribut plătit puterii muzicii. Într-adevăr, puţine forme de artă sunt mai strâns legate de stările emoţionale şi de ritmul corpului omenesc decât muzica. Respiraţia şi bătăile inimii, spre exemplu, sunt intim corelate cu nivelul şi natura activităţilor pe care le desfăşurăm şi cu intensitatea exaltării sau fricii noastre. Multe piese muzicale – niciuna, poate, mai mult decât celebrul *Bolero* al lui Ravel – reflectă direct ritmurile vieţii. De fapt, în filmul *10* realizat de Blake Edwards în anul 1979, Bolero-ul era declarat pista sonoră perfectă pentru a face dragoste. Aşa cum am remarcat deja în Capitolul 1, a spune că simetria joacă un rol major în muzică este echivalent cu a afirma evidenţa. Drept consecinţă, era de aşteptat ca

teoria grupurilor să descrie frumos structurile şi motivele muzicale.

Claviatura unui pian procură cel mai simplu exemplu al relaţiei dintre grupuri şi muzică. Înălţimea unui ton se caracterizează prin *frecvenţă* – numărul de vibraţii pe secundă (de pildă, ale unei coarde). Frecvenţa se măsoară în număr de vibraţii pe secundă sau herţi (notaţi cu Hz), după fizicianul german Heinrich Rudolf Hertz. Spre exemplu, frecvenţa lui C mediu (sau „de" în gama majoră) pe clapele unui pian (figura 101) este de circa 261, 6 Hz. Frecvenţa lui A_4 (sau „la") este de 440 Hz. *Octava* se defineşte aşa încât raportul frecvenţelor să fie egal exact cu 2. O octavă mai sus decât „de" mediu are frecvenţa de 261, 6 X 2 = 523, 2 Hz, iar o octavă mai jos are frecvenţa de 261, 6: 2 = 130, 8 Hz. Notele care sunt separate printr-un număr întreg de octave poartă aceeaşi denumire şi sună asemănător. În „sistemul bine temperat", popularizat de Bach în impresionanta sa colecţie de preludii şi fugi, toate clapele au statut egal. Raportul dintre frecvenţele oricăror două clape adiacente este acelaşi, egal cu 1, 05946. Acest număr (egal cu rădăcina de ordinul doisprezece a lui 2) se obţine pur şi simplu prin cerinţa ca, atunci când este ridicat la puterea 12 (există douăsprezece semitonuri sau jumătăţi de pas în octavă), să dea un raport de 2, corespunzător tonului cu o octavă mai sus.

Matematicianul grec Pitagora este creditat în mod tradiţional cu descoperirea că două note ce corespund unor frecvenţe al căror raport este egal cu raportul dintre două numere întregi simple (cum ar fi 3: 2) dau sunete armonioase („consonante") şi plăcute. O cvintă perfectă, spre exemplu, se caracterizează printr-un raport al frecvenţelor de 3/2, ceea ce corespunde unei separări prin şapte semitonuri (puterea a şaptea a lui 1, 05946

este foarte apropiată de 1, 5). O cvartă perfectă corespunde unui raport al frecvenţelor de 4/3 şi unei diferenţe de cinci semitonuri.

Fiindcă există douăsprezece semitonuri într-o octavă, le putem reprezenta convenabil pe cadranul unui ceas33,

ca în figura 102. Ne putem deplasa acum de la oricare notă la oricare alta, efectuând exact aceeaşi operaţie ca atunci când calculăm ora din zi. Adică, dacă vrem să ştim ce înseamnă 9 ore după 7: 00 p.m., calculăm 7 + 9 = 16 = 4: 00 a.m. (deoarece 12 este socotit şi 0). Adunarea numerelor în acest fel se numeşte, în limbajul matematicienilor, *adunare modulo 12.* Spre exemplu, 8 + 7 = 15 = 3 (modulo 12), iar 10 + 2 = 12 = 0 (modulo 12). Semitonurile sistemului bine temperat ascultă de aceleaşi reguli. Dacă vrem să ştim ce notă obţinem prin 10 semitonuri peste ree (figura 102), calculăm 3 + 10 = 13 = 1 (modulo 12) = doe. Mulţimea de numere (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} sau notele corespunzătoare de pe scara muzicală formează un grup sub operaţia de adunare modulo 12. Puteţi lesne verifica închiderea – de exemplu, 9 + 4 = 13 = 1 (modulo 12) – şi asociativitatea. Elementul neutru este 0, iar toate celelalte numere au un simetric sau un invers. Spre exemplu, cvinta perfectă (corespunzând la 7 semitonuri) este simetricul cvartei perfecte (corespunzând la 5 semitonuri), fiindcă 7 + 5 = 12 = 0 (modulo 12). Ceea ce are sens chiar şi dintr-o perspectivă pur muzicală, căci atunci când se combină aceste două intervale, obţinem un raport de frecvenţe de 3/2 x 4/3 = 2, care este tocmai o octavă – ceea ce dă acelaşi sunet. De fapt, foarte corect spus, muzicienii numesc două intervale ce se combină pentru a da o octavă „inversiuni" ale unuia în raport cu celălalt. Un alt exemplu de două astfel de inversiuni (figura 103) este terţa mică (raport de 6/5; 3 semitonuri) şi sexta mare (raport de 5/3; 9 semitonuri), fiindcă 3 + 9 = 12 = 0 (modulo 12).

Grupurile îşi fac apariţia nu numai în scara muzicală, ci şi în structura anumitor forme de muzică. Un caz simplu este acela al rondei – un tip de scurt canon, în care vocile intră pe rând pentru a cânta aceeaşi melodie, ca în familiarul „Frère Jacques" (figura 104).

Dacă notăm cele patru fraze diferite cu A, B, C, D (figura 104), structura se reprezintă prin AABBCCDD (fiecare frază se repetă), iar ronda pentru patru voci ia

forma:

1: AA B B C CDD AAB B CCDDA AB B CCDD 2: – AAB B CCDDA AB B CCDD AA B B C C

3: A AB B CCDD AA B B C CDD AAB B

4: AA B B C CDD AAB B CCDDA A

Observăm că, dacă ar fi să intre o a cincea voce, ea n-ar face decât să repete sau să dubleze prima voce. De fapt, începând cu orice voce, dacă am continua să adăugăm voci, ajungând la a patra, am obţine dublare. Am putea nota acum cu *a* instrucţiunea „vino cu două măsuri mai târziu”. Aceasta ne deplasează de la o voce la următoarea. Simbolic, a2 (sau *a*° *a)* denotă „vino cu patru măsuri mai târziu”, a3 (a° a° a) este „vino cu şase măsuri mai târziu”, iar a4 („vino cu opt măsuri mai târziu”) este dublarea aceleiaşi voci, sau elementul neutru. Puteţi verifica lesne că cele patru instrucţiuni *I, a,* a2, a3 (unde *I* este elementul neutru al transformării identice) formează un grup faţă de operaţia de „înmulţire” (de ex., *a* şi a3 sunt fiecare inversa celeilalte, fiindcă *a*° a3 = a4 = I).

Clar, nici Bach şi nici oricare altul dintre compozitorii clasici nu aveau teoria grupurilor în minte atunci când îşi compuneau muzica. Teoria grupurilor îşi croieşte inevitabil drum în descrierea tiparelor muzicale datorită simplului fapt că, prin natura ei, este un limbaj al simetriilor. Unii compozitori din secolul XX, mai ales Arnold Schönberg34, Alban Berg şi Anton Webern din a doua Scoală Vieneză, se zice că au cochetat mai hotărât cu muzica bazată pe matematică. Mai exact, în „metoda compunerii cu douăsprezece tonuri”, utilizată în piese ca *Suită lirică* a lui Berg sau *Concertul pentru pian* al lui Schönberg, toate armoniile se bazează pe un „rând de douăsprezece tonuri” care este, de fapt, o permutare a celor douăsprezece note cromatice obişnuite. Un rând de douăsprezece tonuri este utilizat fie în ordinea sa originală (aleasă de compozitor), fie poate fi transformat prin unele operaţii. Trei operaţii de bază utilizate de compozitorii vienezi erau *inversiunea rândului, retrogresiunea* şi *inversiunea retrogradă.* În inversiunea rândului, intervalele coborâtoare erau

înlocuite cu intervale urcătoare şi invers. Spre exemplu, dacă rândul original începea cu „de” şi urca o cuartă perfectă până la „fa”, rândul inversat cobora o cuartă perfectă până la „sol” (figura 102). Retrogresiunea inversa ordinea salturilor melodice. Dacă ultimul salt din rândul original era o terţă mare în sus, atunci acesta va fi primul salt din noul rând. În sfârşit, inversiunea retrogradă aplica simultan atât inversiunea rândului, cât şi retrogresiunea. Vă puteţi convinge lesne că aceste trei transformări, împreună cu cea identică („nu face absolut nimic”), formează un grup sub operaţia „urmată de”. În particular, fiecare membru al acestui grup este propriul său simetric (sau invers).

Multă lume, incluzându-i pe pasionaţii sălilor de concerte, simt un disconfort la muzica atonală35 a lui Schönberg, ca şi la alte piese experimentale, de Igor Straviński, Aaron Copland, Pierre Boulez, Luciano Berio şi de mulţi alţii. Membrii acestui public anti-atonalitate vor argumenta, probabil, că utilizarea matematicii de către aceşti compozitori (dacă este, într-adevăr, deliberată) nu a servit calitatea muzicii. Totuşi, indiferent care ar putea fi opinia noastră personală despre muzica atonală, este de netăgăduit faptul că experimentarea „matematică” a lui Schönberg şi (mai mult chiar) a lui Webern a deschis uşa interesantei Noi Muzici de avangardă şi a furnizat inspiraţia pentru *serialism.* Această revoluţie în compoziţie a înlocuit toate regulile şi convenţiile tradiţionale, printr-o serie structurală de note ce guvernează întreaga dezvoltare a compoziţiei. Fascinanta muzică a unor compozitori ca Olivier Messiaen şi Milton Babbitt îşi are originea în această radicală schimbare de principii.

Muzica reprezintă o formă de artă în care au fost implicate numai cele mai de bază concepte ale grupurilor. Dar dezvoltarea teoriei grupurilor nu s-a oprit la începutul secolului XX. O demonstraţie legată de ea, care a fost terminată abia în august 2004, este în unele privinţe cea mai complexă demonstraţie din istoria matematicii.

„Războiul de treizeci de ani” sau îmblânzirea monstrului

Eforturile ştiinţifice reprezintă adeseori o căutare a celor mai de bază blocuri constructive. În ceea ce priveşte structura materiei, această căutare lungă de secole a condus la descoperirea moleculelor şi atomilor, apoi a protonilor şi a neutronilor, apoi a particulelor elementare din modelul standard (quarci, electroni, neutrino, mezoni, tauoni) şi, în final, la ipoteza stringurilor. În vastele întinderi ale spaţiului, astronomii caută acum primele stele şi primii nori de stele ce s-au format în univers – blocurile constructive ale giganticelor galaxii de astăzi. În teoria grupurilor, vânătoarea a fost după o clasificare a tuturor grupurilor simple (care nu au subgrupuri normale nebunale), din care pot fi construite toate celelalte grupuri. Aşa cum am văzut în Capitolul 7, clasificarea grupurilor Lie simple a fost efectuată spre sfârşitul secolului al XIX-lea, de Wilhelm Killing şi Elie Cartan. Grupurile Lie sunt grupuri de transformări continue (cum ar fi rotaţiile în spaţiul cu trei dimensiuni), care fuseseră definite de Sophus Lie în 1874. Prin chiar natura lor, grupurile Lie au un număr infinit de elemente (de exemplu, există un număr infinit de unghiuri de rotaţie posibile). Şi totuşi, este suficient să fie precizat un număr finit de parametri, pentru a caracteriza complet orice grup Lie. De pildă, elementele grupului de rotaţii ale unui cerc în plan, notate de obicei cu SE (2) sau U (1), sunt complet determinate dacă este precizat un singur parametru – unghiul de rotaţie. Dimensiunea acestui grup este, de aceea, 1. Grupul de rotaţii ale unei sfere în spaţiul tridimensional poate fi caracterizat prin trei parametri – două unghiuri ce identifică poziţia axei de rotaţie şi un unghi pentru rotaţia însăşi. Acest grup, notat cu SE (3), este ca atare de dimensiune 3. Killing şi Cartan au izbutit să găsească patru familii infinite de grupuri Lie (notate tradiţional cu A, B, C, D, pentru în = 1, 2, 3…) şi cinci grupuri sporadice, care nu puteau fi incluse în niciuna dintre aceste familii. Aceste grupuri sporadice se numesc

de regulă G_2, F_4, E6, E7 şi E8 şi au dimensiuni de 14, 52, 78, 133, respectiv 248. Aşa cum am spus în Capitolul 7, grupurile Lie simple joacă un rol crucial în modelul standard şi se pot dovedi a fi un instrument esenţial în teoria stringurilor.

Clasificarea grupurilor finite simple a reieşit a fi o sarcină mult mai descurajatoare decât a grupurilor Lie. Pe la sfârşitul secolului al XIX-lea, erau cunoscute şase familii infinite şi cinci grupuri finite simple sporadice (excepţionale). Una dintre acele familii fusese definită36 de nimeni altul decât de Galois însuşi, pe când se chinuia cu nerezolvabilitatea ecuaţiei de gradul cinci. Amintiţi-vă că într-o permutare pară a unei mulţimi de elemente, există un număr par de inversări ale ordinii naturale sau originale (Capitolul 6), iar într-o permutare impară, numărul de inversări este impar. Spre exemplu, 1324 reprezintă o permutare impară a lui 1234, din cauză că ea implică numai o inversare (3 apare înaintea lui 2), dar 4321 reprezintă o permutare pară, din cauză că, după cum puteţi verifica, implică şase inversări. Ştim deja (Capitolul 6) că toate permutările a n elemente formează un grup cu $n!$ elemente. De fapt, teorema lui Cayley spune că fiecare grup are aceeaşi structură ca un grup de permutări. Mulţimea permutărilor pare ale oricărui număr de elemente formează, de asemenea, un grup – un subgrup al grupului complet de permutări. Acest lucru este uşor de înţeles: Dacă o permutare implicând un număr par de inversări este urmată de o a doua, tot pară, atunci numărul total de permutări este categoric şi el par, ceea ce înseamnă că e respectată cerinţa de închidere. Grupurile de permutări pare se numesc *grupuri alternate.* Galois a arătat că toate grupurile alternate obţinute din permutările a peste patru elemente sunt simple, aceasta fiind proprietatea pe care a utilizat-o pentru a demonstra nerezolvabilitatea printr-o formulă a ecuaţiei de gradul cinci.

O a doua familie de grupuri simple cunoscută matematicienilor la sfârşitul secolului al XIX-lea era de

tipul pe care l-am întâlnit la scara muzicală. În acelaşi mod în care numerele de la zero la 11 formează un grup când li se asociază operaţia de adunare modulo 12, numerele de la zero la *n* – 1 formează un grup cu adunarea modulo *n*, pentru orice valoare a lui *n*. Grupurile de acest tip se numesc *grupuri ciclice,* iar grupurile ciclice cu un număr prim de elemente sunt simple. Celelalte patru familii de grupuri finite simple erau echivalente în multe privinţe cu familiile corespunzătoare de grupuri Lie. În 1955, matematicianul francez Claude Chevalley (1909 – 1984) a descoperit noi familii de grupuri simple. De fapt, s-a constatat că grupurile Lie sporadice sunt sursa familiilor de grupuri finite simple. În cele din urmă, au fost identificate 18 familii de astfel de grupuri.

Povestea grupurilor finite simple sporadice37 a început cu matematicianul francez Émile Léonard Mathieu (1835 – 1890). Între 1860 şi 1873, pe când studia geometriile finite, Mathieu a descoperit primele cinci grupuri simple sporadice, care ulterior au fost numite după el. Cel mai mic dintre acestea are 7 920 de elemente, iar cel mai mare 244 823 040. A trecut un întreg secol înainte ca următorul grup simplu sporadic să fie descoperit, de matematicianul iugoslav Zvonimir Janko, în 1965. Fusese prezisă existenţa acestui grup simplu şi a altora încă înainte ca ele să fie realmente „descoperite”. Exact aşa cum simetria SU (3) a prezis existenţa particulei omega minus, Janko a reuşit să demonstreze că, dacă ar exista un grup simplu cu anumite proprietăţi, trebuia în mod categoric să constea din 175 560 de elemente. După pagini şi pagini de calcule, căutarea sa a dat roade, el izbutind să construiască grupul simplu numit acum „II.

Descoperirea lui Janko a încheiat un secol de hibernare şi a marcat începutul unui deceniu de descoperiri. Între 1965 şi 1975, au fost construite nu mai puţin de 21 de grupuri simple sporadice, aducând totalul la 26 (în plus faţă de cele 18 familii). Cel mai mare dintre cele 26 de grupuri excepţionale, la care ne referim de obicei cu numele de „monstrul”, conţine ameţitorul număr

de

808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.
710.757.005.754.368.000.000.000

de elemente! Pentru pasionaţii numerelor prime, acest număr este egal cu:

246 X 320 X 59 X 76 X 112 X 133 X
17 X 19 X 23 X 29 X 31 X 41 X 47 X 59 X 71

Existenţa monstrului fusese prezisă în 1973 de matematicianul german Bernd Fischer şi de americanul Robert Griess (independent), el fiind construit de Griess în 1980. Fischer a mai descoperit şi alte patru grupuri sporadice, ceea ce a făcut şi Janko în Australia şi în Germania. În Anglia, John Conway a descoperit trei.

Identificarea celor 18 familii şi a celor 26 de grupuri simple sporadice era doar punctul de plecare pentru ceea ce a reieşit a fi unul dintre cele mai impresionante şi provocatoare proiecte din istoria matematicii. Scopul era clar: să se demonstreze fără echivoc că această clasificare epuiza cu adevărat toate posibilităţile de grupuri finite simple. Cu alte cuvinte, să se demonstreze că orice grup finit simplu este fie membru al uneia dintre cele 18 familii, fie al unuia dintre cele 26 de grupuri sporadice. Omul care şi-a asumat responsabilitatea de a duce la bun sfârşit acest impresionant proiect, Daniel Gorenstein, l-a numit ulterior „Războiul de treizeci de ani", din cauză că o bună parte din munca de clasificare a fost desfăşurată în cele trei decenii dintre 1950 şi 1980.

Daniel Gorenstein (1923 – 1992) 38 a crescut la Boston, a studiat la Harvard şi a început să se intereseze de grupurile finite pe când era student. În cel de-al Doilea Război Mondial, el a predat matematica militarilor, contribuind astfel la efortul de război. După război, s-a întors să-şi continue studiile la Harvard, iar lucrarea de doctorat şi-a încheiat-o în 1950. După câţiva ani în care a lucrat mai ales în domeniul geometriei algebrice, el a revenit la grupurile finite, în 1957, şi s-a implicat în clasificarea celor finite simple în anul universitar 1960 – 61.

În plus faţă de descoperirile celor 21 de noi grupuri simple sporadice, două alte evenimente au contribuit la pregătirea terenului pentru asaltul masiv asupra problemei clasificării. Unul era o prelegere ţinută la Amsterdam în 1954, de către matematicianul germano-american Richard Brauer (1901 – 1977). În această importantă prelegere, Brauer propunea o metodă de clasificare bazată pe identificarea unor mici „nuclee" ale grupurilor simple, nuclee ce semănau din punctul de vedere al proprietăţilor cu grupurile-părinte. Ideea lui Brauer era de a le utiliza pe acestea ca pe un prim pas în verificarea ipotezei că orice grup arbitrar poate fi identificat cu unul dintre grupurile simple cunoscute.

Cel de-al doilea eveniment crucial pentru soarta războiului clasificării a fost demonstrarea, în 1963, de matematicienii Walter Feit şi John Thompson de la Universitatea din Chicago, a unei importante teoreme. În esenţă, aceasta spune că orice grup finit simplu (care nu este ciclic) trebuie să aibă un număr par de elemente. Deşi corectitudinea sa fusese anticipată încă din 1906, de matematicianul britanic William Bumside (1852 – 1927), şi afirmaţia era cunoscută sub denumirea de *a doua conjectură a lui Bumside,* demonstraţia din 1963 a umplut toate cele 255 de pagini ale unuia dintre numerele publicaţiei *Pacificlournal of Mathematics.* Impactul demonstraţiei a fost enorm. Atât ideile, cât şi metodele introduse prin intermediul respectivului articol au stat la baza muncii de clasificare. Aşa cum scria Gorenstein în 198939, „În mare măsură sub impulsul teoremei ordinului impar [teorema Feit-Thompson spune că grupurile finite cu un număr impar de elemente sunt rezolubile], exista un interes stimulator pentru teoria grupurilor finite. În perioada care a urmat, de un deceniu şi jumătate, o lungă listă de tineri matematicieni dotaţi, care aveau să joace un rol proeminent în demonstraţia clasificării, au fost atraşi în domeniu". Înarmat cu ideile lui Brauer şi cu teorema Feit-Thompson, Gorenstein a schiţat în 1972 un îndrăzneţ plan, în şaisprezece paşi, pentru realizarea clasificării. Cu

precauţie, el îşi exprima speranţa că aceasta va fi definitivată până la sfârşitul secolului XX.

Având în vedere că în activitatea de clasificare s-au implicat circa 100 de matematicieni, care au produs cam 15.000 de pagini de demonstraţii, publicate în 500 de articole, estimarea iniţială a lui Gorenstein nu părea exagerată. De fapt, matematicianul Ron Solomon de la Universitatea din Ohio, unul dintre liderii echipei, scria în 1995: „În afară de Gorenstein, niciun alt teoretician de marcă al grupurilor nu credea în 1972 că vom încheia clasificarea în acest secol”. Dar aşa cum este adeseori cazul în matematică, o singură persoană poate face întreaga diferenţă. Pentru teorema clasificării, acea persoană a fost matematicianul Michael Aschbacher de la Caltech. Printr-o serie de fulgerătoare asalturi, el a sfărâmat câteva din obstacolele majore, dinamitând porţiuni mari din demonstraţie. Apelând la cuvintele lui Gorenstein:

Au fost mulţi alţi teoreticieni ai grupurilor care şi-au adus contribuţii semnificative la demonstraţia clasificării. Dar intrarea lui Aschbacher în domeniu, la începutul anilor 1970, este cea care a schimbat irevocabil peisajul grupurilor simple. Asumându-şi rapid un rol conducător în demonstrarea completă a teoremei de clasificare, în următorul deceniu a tras după sine o întreagă „echipă”, până când demonstraţia avea să fie terminată.

Într-adevăr, spre uimirea generală, încă din 1983 s-a crezut că demonstraţia fusese încheiată. Totuşi, din cauza lungimii ei excesive, Gorenstein, Solomon şi matematicianul Richard Lyons şi-au reunit forţele în 1982, lansând un proiect de revizuire, menit să producă o versiune mai scurtă şi mai coerentă a demonstraţiei. În anii următori, au fost identificate câteva lacune importante ale variantei iniţiale. Ultima dintre acestea a fost, în sfârşit, soluţionată40 în august 2004, printr-o lucrare în două volume scrisă de Aschbacher şi matematicianul Stephen Smith, de la Universitatea din Illinois. Proiectul de revizie

Gorenstein-Lyons-Solomon înaintează şi el bine, cu şase monografii deja publicate sau sub tipar. Cu toate acestea, cel puţin încă cinci ani vor mai fi necesari pentru a încheia această monumentală întreprindere.

În prezent, studierea grupurilor finite este strâns legată de o mare diversitate de alte domenii ale matematicii, de la topologie până la teoria grafurilor. Ar mai putea exista şi conexiuni – bănuite, dar încă nu pe deplin explorate – cu teoria câmpului cuantic.

Galois a introdus conceptul de grup şi a construit prima familie de grupuri finite simple, cu un modest scop în minte – să demonstreze care ecuaţii sunt rezolvabile printr-o formulă şi care nu. El ar fi fost, cu siguranţă, încântat să vadă la ce au dus aceste firave începuturi. Ron Solomon descria frumos rezultatele „Războiului de treizeci de ani”: „Erupţia matematicii în zilele de glorie ale studiului grupurilor simple a generat o uimitoare înţelegere a grupurilor finite şi a descoperit multe dintre cele mai fascinante obiecte de pe firmamentul matematic”.

9

Recviem pentru un geniu romantic

D

Între multele mii de matematicieni care au trăit pe pământ din vremea anticului Babilon, care a fost cel mai influent? Matematicianul şi autorul Clifford Pickover1 a condus o cercetare neoficială, punând exact această întrebare, şi a prezentat clasamentul primilor zece în antrenanta sa carte *Wonders of Numbers.* Evariste Galois figurează pe listă (la numărul opt), deşi acest chinuit romantic a murit la 20 de ani. Ce-i face pe unii oameni să-i depăşească atât de mult pe alţii în ceea ce priveşte creativitatea? Şi cum este posibil ca o atât de abundentă creativitate să se manifeste la o asemenea vârstă? Dacă aş putea furniza răspunsuri precise la aceste întrebări, sunt sigur că mulţi psihologi, biologi, educatori şi corporaţii m-ar aprecia foarte mult. Fiindcă nu pot, totuşi, voi prezenta pe scurt câteva dintre concepţiile curente cu privire la aceste teme şi voi examina dacă şi cum se aplică ele la

Galois.

Mai întâi, permiteţi-mi să clarific că prin creativitate extraordinară înţeleg un proces care are un impact cultural semnificativ – o idee sau un act ce produce o schimbare deosebită. Exemple evidente includ întemeierea psihanalizei de către Sigmund Freud şi formularea legilor mişcării de către Newton.

Psihologul Mihály Csikszentmihályi de la Universitatea din Chicago2 a atras atenţia că, prin însăşi natura sa, creativitatea nu este doar ceva ce se întâmplă în capul cuiva. Pentru a putea declara o idee sau realizare drept „creativă", trebuie să o comparăm cu criterii sau standarde existente. De pildă, putem spune fără nicio rezervă că relativitatea generală a lui Einstein este una dintre cele mai creative teorii din toate timpurile numai după ce o judecăm în raport cu toate celelalte teorii fizice ale universului. Creativitatea implică întotdeauna relaţii între cel puţin trei componente: persoana creativă; domeniul în care apare actul creator (de exemplu, matematica sau o ramură oarecare a ei, muzica, literatura); şi echipa de jucători sau practicanţi care acţionează ca paznici şi judecători (alţi matematicieni, custozi de muzeu, cititori de literatură ori critici). Orice standarde am considera, Galois era uimitor de creativ. Ideile acestui tânăr au schimbat profund matematica. Noul domeniu care a luat fiinţă datorită lui – teoria grupurilor – s-a extins mult dincolo de frontierele matematicii pure, în artele vizuale, muzică, fizică şi oriunde pot fi găsite simetrii.

Aşa cum am remarcat anterior, înţelegerea sistemului de lucru al creativităţii nu-i intrigă numai pe specialiştii din ştiinţele cognitive, pe neurologi şi pe educatori. Mari companii şi corporaţii se străduiesc să găsească modalităţi de a cultiva creativitatea °i inovaţia salariaţilor. Multe milioane de dolari se cheltuiesc în fiecare an pe seminare, perioade de retragere în locuri izolate, sesiuni de brainstorming şi cursuri speciale, toate având scopul de a produce un alt Bill Gates. Dar oare pot fi

identificate sursele creativităţii? Sau ideile creative or fi ivite doar întâmplător, ca nişte frânturi rătăcite de cunoaştere, inteligent culese din diverse discipline, firav legate între ele?

Secretele minţii creative

Poetul englez Owen Meredith3 (pseudonimul lui Edward Robert Bulwer-Lytton, conte de Lytton) a spus cândva: „Geniul face ceea ce trebuie făcut, iar Talentul face ceea ce poate". Acesta este un citat interesant, căci el combină şi pune în contrast doi termeni care pot ocazional să se suprapună cu creativitatea, dar care nu trebuie confundaţi cu ea – „talent" şi „geniu". De-a lungul secolelor, au fost cu certitudine mulţi pictori şi inventatori talentaţi, dar foarte puţini (sau chiar niciunul) pot fi comparaţi cu Leonardo da Vinci în ceea ce priveşte creativitatea. Pe de altă parte, pentru a fi creativ – adică, pentru a produce o schimbare de paradigmă –, nu trebuie neapărat să fii geniu. În particular, multe studii arată că peste un anumit nivel al coeficientului de inteligenţă4 (IQ), probabil în jur de 120, nu există o corelaţie clară între inteligenţă şi creativitate. Cu alte cuvinte, adevărata creativitate necesită probabil un oarecare grad de inteligenţă, dar nu există absolut nicio garanţie că o persoană cu un IQ de 170 va fi cât de cât mai creativă decât una cu IQ de 120. Unul dintre principalele motive pentru care nu există nicio „explicaţie" a creativităţii este tocmai faptul că toate fiinţele umane sunt creative la un anumit nivel. Atunci când nu puteţi deschide un borcan şi luaţi un prosop pentru a împiedica mâna să alunece, aţi găsit o soluţie creativă. Atunci când un elev îşi scrie în palmă numărul de telefon al unui prieten, el răspunde creativ la o nevoie urgentă. La sfârşitul zilei, până şi cei mai creativi oameni care au trăit vreodată tot o minte omenească trebuie să utilizeze.

O altă problemă care trebuie reţinută este că exploziile creative din domenii diferite nu sunt uşor de comparat. Aşa cum a observat Howard Gardner5, cercetător din domeniul cognitivităţii şi educaţiei la

Harvard: „Descoperirile ştiinţifice creative dintr-o sferă de activitate nu pot fi puse necritic în aceeaşi oală cu descoperirile ştiinţifice din alte sfere de activitate; procesul gândirii şi realizările ştiinţifice ale lui Einstein diferă de acelea ale lui Freud şi, chiar şi mai mult, de acelea ale lui Eliot [poetul T.S. Eliot] sau Gandhi. Ideea că ar exista o singură varietate de creativitate este mitică”. În pofida acestor obiecţii, într-o tentativă aproape disperată de a descoperi fondul creativităţii, cercetătorii (inclusiv Gardner) au încercat deseori să identifice trăsăturile comune ale persoanelor creative. Printre calităţile care au fost examinate se includ aspecte fiziologice cerebrale, trăsături de personalitate, diverse caracteristici cognitive (cum ar fi capacitatea de a face asocieri îndepărtate) şi circumstanţe sociologice, atât din mediul ambiant apropiat (de exemplu, familie şi prieteni), cât şi dintr-o sferă socială mai largă (de exemplu, etnică, politică). Ne putem face o oarecare idee despre modul în care lucrează diversele modele creative apelând la un exerciţiu simplu, bazat pe conceptele metodei ştiinţifice. Aceasta din urmă foloseşte un model de referinţă pentru a explica sistematic un grup de fenomene observate. Acest proces idealizat poate fi rezumat în trei cuvinte: inducţie, deducţie, verificare. Mai explicit, metoda ştiinţifică începe cu strângerea datelor privitoare la diverse fenomene observate în natură sau pe cale experimentală. Pe baza lor, se construieşte un model, un scenariu sau, uneori, chiar o teorie completă. În final, modelul sau teoria se testează, prin confruntare cu noi experimente, observaţii sau cu un set de fenomene recunoscute, care nu au fost utilizate în formularea modelului.

Putem urmări o versiune simplă a acestei filosofii generale examinând cum poate fi evaluat Galois în raport cu un „şablon” acceptat de trăsături de personalitate ale minţii creative, câtă vreme Galois însuşi nu a fost utilizat la crearea acestui „şablon”. Această din urmă cerinţă este lesne de satisfăcut – n-am găsit numele lui Galoise pe niciuna dintre listele întocmite de cercetătorii creativităţii.

Primul lucru pe care l-aş remarca este acela că există un foarte bun motiv pentru care am pus cuvântul „şablon” între ghilimele – niciun astfel de „şablon” nu există cu adevărat! Chiar dacă o persoană este predispusă genetic să dea dovadă de creativitate ca pictor, în cazul în care nu are acces la o educaţie corespunzătoare şi nu se mândreşte cu ceva relaţii în lumea artei, sunt şanse să nu auzim niciodată de ea. Mai mult decât atât, nu toţi creatorii, nici măcar cei care activează în acelaşi domeniu, nu sunt asemenea. În exprimarea lui Csikszentmihályi, „Michelangelo nu se prea da în vânt după femei, în vreme ce Picasso nu se mai sătura de ele”. Similar, în Capitolul 3 am văzut că înflăcăratul Cardano a ars lumânarea la ambele capete, în vreme ce dal Ferro, care a contribuit la rezolvarea exact aceloraşi probleme matematice, era retras şi modest. Cu toate acestea, după cum a remarcat psihologul Ellen Winner de la Boston Collège cu privire la copiii înzestraţi: „Pentru aceia care *îşi fac loc* [sublinierea este a mea] în clasamentul creatorilor, un anumit set de trăsături ale personalităţii se dovedeşte de departe mai important decât a avea un IQ general înalt sau o mare abilitate specifică domeniului, chiar şi una prodigioasă. Creatorii sunt persoane independente, dominante, concentrate, care ştiu să rişte şi să apese tare pedala de acceleraţie”. Deşi cercetătorii nu au putut discerne dacă, într-adevăr, caracteristicile personale pot fi cauzele directe ale creativităţii, încape puţină îndoială că anumite calităţi sunt puternic implicate în procesul de creaţie. Dar care sunt acestea? Psihologii John Dacey şi Kathleen Lennon7 pun accentul pe toleranţa la ambiguitate – capacitatea de a gândi, opera şi rămâne deschis la minte în situaţii în care regulile sunt neclare, în care nu există linii călăuzitoare sau în care sistemele de sprijinire obişnuite (de pildă familie, scoală, societate) s-au prăbuşit. Într-adevăr, fără competenţa de a funcţiona acolo unde nu există reguli, Picasso n-ar fi inventat niciodată cubismul, iar Galois n-ar fi creat teoria grupurilor. Toleranţa la ambiguitate este o condiţie necesară pentru creativitate.

Psihologul Csikszentmihályi se concentrează asupra unei calităţi oarecum înrudite, la care se referă cu termenul de „complexitate”. *Complexitatea* presupune să adăposteşti tendinţe care, în mod normal, par a se situa la extreme opuse. Spre exemplu, mai toţi oamenii se situează undeva pe la mijlocul drumului continuu dintre indisciplină totală şi disciplină exagerată. Oamenii foarte creativi pot alterna între aceste două extreme cu o rapiditate uluitoare. Csikszentmihályi a intervievat zeci de persoane, dintr-o gamă largă de domenii, întinzându-se de la arte, discipline umaniste şi ştiinţe până la afaceri şi politică. Pe baza acestor interviuri, a întocmit apoi o listă de zece dimensiuni ale complexităţii – zece perechi de caracteristici aparent antitetice8, care sunt adeseori prezente simultan în minţile creative. Lista este următoarea:

1. Izbucniri de impulsivitate ce punctează perioadele de linişte şi de repaus.
2. Dovezi de agerime, dar şi de extremă naivitate.
3. Mari salturi între limitele extreme ale responsabilităţii şi iresponsabilităţii.
4. Un simţ înrădăcinat al realităţii, împreună cu o mare doză de fantezie şi imaginaţie.
5. Perioade alternate de introversiune şi extraversiune.
6. Comportament simultan umil şi mândru.
7. Androginitate psihologică – fără o adeziune clară la stereotipia rolului sexului.
8. Atitudine rebelă şi iconoclastă, dar şi respectuoasă faţă de domeniul de activitate şi de istoria sa.
9. Dovezi că este pasionat de ceea ce face, dar totodată şi obiectiv faţă de propria muncă.
10. Amestecarea sentimentelor de suferinţă şi durere cu voia bună şi bucuria.

Interesant lucru, psihologul Ellen Winner consideră9 că toţi copiii minune prezintă, de obicei, numai o extremă a spectrului caracteristicilor – ele tind să fie intense, controlate şi introvertite. Dar ar trebui să ne amintim că aceşti copii foarte dotaţi se află încă în stadiul de

acumulare a cunoaşterii, nu în cel de creativitate. Realitatea că, de regulă, ei nu devin deosebit de creativi la maturitate poate reflecta (printre altele) faptul că doar puţini posedă realmente capacitatea de a face faţă complexităţii.

Deşi lista lui Csikszentmihályi este, clar, cel mult sugestivă, ea îl descrie pe Galois uimitor de bine. Galois reprezenta, în multe privinţe, culmea contradicţiilor şi a complexităţii. Să luăm, spre exemplu, scrisoarea pe care i-a adresat-o pe 25 mai lui Auguste Chevalier: „Cum pot să mă consolez când mi-am epuizat într-o lună cea mai mare sursă de fericire pe care o poate avea un om?” Se pot imagina salturi mai mari de dispoziţie? Sau să examinăm descrierea următoare, dintr-o scrisoare trimisă de Raspail din închisoare. Comportamentul lui Galois oscilează între calm şi erupţie:

Hoinărea prin curtea închisorii, într-o zi, cufundat în gânduri, ca şi cum ar fi visat cu ochii deschişi. Avea înfăţişare bolnăvicioasă, de om prezent numai fizic pe pământ, pe care doar gândurile îl mai ţin în viaţă.

Straşnicii noştri băieţi i-au strigat: „Hei, ce dacă n-ai decât douăzeci de ani, eşti om în toată firea! Nu poţi să-ţi iei băutura, aşa-i? Băutul te sperie, nu?” El s-a dus atunci să înfrunte pericolul în faţă, şi-a turnat pe gâtlej o sticlă întreagă, dintr-odată, şi a aruncat-o în şicanatorii săi.

A fi ager la minte, dar şi naiv, realist şi totodată plin de imaginaţie, simultan rebel şi respectuos faţă de matematici şi matematicieni, sunt combinaţii de trăsături ce puteau fi inventate special pentru a-l descrie pe Galois. Cum altfel i-aţi caracteriza încercările de intrare la École Polytechnique, aprigele schimburi de cuvinte cu directorul şcolii, paranoicele interacţii cu mai marii matematicii şi confruntările cu legea?

Androginitatea psihologică – a fi pe de o parte foarte sensibil, mai „feminin”, pe de alta agresiv şi insultător – era o altă trăsătură evidentă a lui Galois. Să considerăm următoarea epistolă, pe care i-a scris-o din închisoare mătuşii sale, Celeste-Marie Guinard:

Dragă mătuşă, mi s-a spus că eşti bolnavă şi ţintuită la pat. Simt nevoia să afli cât de rău îmi pare, iar acest sentiment este agravat şi de faptul că sunt lipsit de plăcerea de a te vedea, fiindcă sunt închis în camera mea şi nu pot vizita pe nimeni. Eşti foarte amabilă că te-ai gândit să-mi trimiţi cadouri. Este deosebit de plăcut să primeşti lucruri care-ţi amintesc de cei vii atunci când eşti într-un mormânt. Sper să te găsesc sănătoasă atunci când ies din închisoare. Prima mea vizită va fi la tine.

Greu de crezut, dar aceasta este aceeaşi persoană despre care matematiciana Sophie Germain i-a scris următoarele prietenului şi colegului său Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja: „Întors acasă, el [Galois] a continuat cu obiceiul său de a insulta, despre care ţi-a dat o idee după cea mai bună prelegere a ta de la Academie. Sărmana femeie [mama lui Galois] a fugit de acasă, lăsându-i fiului său doar strictul necesar ca să trăiască”. Dacey şi Lennon au mai identificat câteva trăsături care, în opinia lor, contribuie la tolerarea ambiguităţii şi la rolul ei în promovarea creativităţii. Pe una dintre acestea – *libertatea stimulului* – am putea s-o definim ca fiind abilitatea de a gândi în afara cutiei. În mare măsură, esenţa creativităţii este reprezentată de capacitatea de a renunţa la ipotezele obişnuite şi la orice prejudecată. Permiteţi-mi să dau un foarte simplu exemplu de libertate a stimulului. Având şase chibrituri de lungime egală, ca cele din figura 105, ne propunem să le utilizăm pentru a forma patru triunghiuri, cu laturi egale. Încercaţi să vedeţi dacă reuşiţi, dar este bine să ştiţi că rezolvarea necesită o metodă neconvenţională. În caz că nu vă vine nicio idee, nu disperaţi; mulţi oameni au dificultăţi cu această problemă. Soluţia este dată în Anexa 10. Demonstraţia lui Galois privitoare la ce ecuaţii sunt rezolvabile printr-o formulă (Capitolul 6) este întruchiparea gândirii din afara cutiei – pentru a răspunde la o întrebare despre ecuaţiile algebrice, el a inventat un întreg nou domeniu al matematicii.

Există şi o altă caracteristică ce pare a fi împărtăşită

de mulţi oameni creativi (în special bărbaţi), iar aceasta i se aplică şi lui Galois – moartea timpurie a tatălui. Din aproape o sută de intervievaţi, toţi creativi, Csikszentmihályi a găsit că nu mai puţin de trei bărbaţi din zece şi două femei din zece rămăseseră orfani dinainte de vârsta adolescenţei.

Cum poate fi stimulată creativitatea de pierderea tatălui? Viaţa îi pune pe adolescenţii orfani într-o situaţie complexă – un amestec de povară şi oportunitate. Pe de o parte, povara de a trăi fără tată este imensă. Pe de alta, aceşti adolescenţi au extraordinara oportunitate de a se inventa cu adevărat pe ei înşişi. Filosoful francez Jean-Paul Sartre10 (1905 – 1980) observa în cartea sa autobiografică *Les mots (Cuvintele)*: „Moartea lui Jean Baptiste [tatăl lui Sartre] a fost cel mai mare eveniment din viaţa mea: a trimis-o pe mama înapoi în lanţurile ei şi mi-a dat libertate… De-ar fi trăit tata, s-ar fi aşezat cu tot corpul peste mine şi m-ar fi strivit. Noroc că a murit tânăr". Acesta este, cu siguranţă, un punct de vedere peste măsură de cinic. Deşi unii oameni creativi, printre care este posibil să se fi numărat inclusiv Abel şi Galois, au fost mânaţi spre independenţă şi curiozitate de moartea tatălui, multor altora le-a priit sprijinul primit de la familii. Există cazuri, spre exemplu, în care atât tatăl, cât şi fiul au fost laureaţi ai Premiului Nobel. Lui Niels Bohr i s-a decernat acest premiu pentru fizică în 1922, iar fiului său, Aage Bohr, în 1975. Un exemplu şi mai impresionant este acela al lui William Henry Bragg şi al fiului său William Lawrence Bragg. Echipa tată-fiu a câştigat Premiul Nobel pentru fizică în 1915, când Lawrence n-avea decât 25 de ani.

Galois şi-a finalizat strălucita lucrare asupra teoriei grupurilor înainte de a fi împlinit vârsta de 21 de ani, iar geniul lui Abel a uluit lumea matematicii înainte ca acest biet matematician să fi împlinit 27 de ani. Ar trebui să fim surprinşi? Nu, realmente. Unii dintre cei mai creativi matematicieni, poeţi şi compozitori au fost extraordinar de tineri atunci când au produs cea mai bună operă a lor.

Majoritatea pictorilor, romancierilor şi filosofilor, pe de altă parte, continuă să creeze şi rămân adeseori în culmea gloriei şi la vârste avansate. Criticul muzical şi romanciera Marcia Davenport (1903 – 1996) a exprimat frumos această realitate: „Toţi marii poeţi au murit tineri. Ficţiunea este arta vârstei medii. Iar eseurile sunt arta bătrâneţii".

L-am întrebat pe Sir Michael Atiyah, cel care a primit Premiul Abel în 2004, de ce crede el că matematicienii dau dovezi atât de timpurii de perspicacitate. Mi-a răspuns numaidecât:

În matematică, dacă eşti iute la minte, poţi ajunge foarte repede în „linia frontului" cercetării avansate. În alte domenii, trebuie să citeşti mai întâi tomuri întregi. Mai mult decât atât, dacă ai activat prea multă vreme într-un anumit domeniu, devii condiţionat să gândeşti ca oricare altul. Atunci când eşti nou, nu eşti silit să adopţi ideile celor din jur. Cu cât eşti mai tânăr, cu atât şansele de a fi original îţi sunt mai mari.

Psihologul Howard Gardner face o distincţie similară între matematicieni şi savanţi, pe de o parte, şi artişti, pe de alta:

Este important să remarcăm aici o diferenţă decisivă în raport cu creaţia din ştiinţe sau din matematică. Oamenii din aceste din urmă domenii încep să fie productivi la o vârstă timpurie şi, cu certitudine, au opţiunea de a face numeroase inovaţii în primii lor ani. Spre deosebire de arte, aceste domenii progresează şi acumulează în ritm rapid, stimulate de descoperirile celor mai creative minţi; dar instrumentele făurite mai devreme în viaţă pot deveni irelevante sau disfuncţionale.

Creativitatea matematică poate fi distinsă şi de creativităţile din alte domenii ştiinţifice prin faptul că nu se supune, de obicei, aşa-numitei „reguli a celor zece ani", a lui Gardner. Conform acesteia, mulţi oameni creativi au mari realizări abia după zece ani de muncă. Atât Abel, cât şi Galois au avut curajul să atace ecuaţia de gradul cinci pe când mai erau încă la liceu! Ei au dat răspunsul definitiv

cu privire la rezolvabilitatea acesteia la douăzeci de ani sau puţin după aceea, cu mult mai înainte de a se aplica regula celor zece ani.

Există şi un alt aspect al personalităţii lui Galois care se potriveşte cu părerile actuale despre creativitate – faptul că el a manifestat puternice simptome de paranoia. Neîncetatele sale impresii, că este persecutat şi tracasat de mediocritate, cu certitudine mergeau dincolo de normal. Adeseori au fost făcute conexiuni între genialitate şi dezordine mintală. Încă din Antichitate, filosoful roman Seneca scria că „niciun mare geniu nu a existat vreodată fără o urmă de nebunie". În 1895, psihiatrul W.L. Babcock11 a publicat un articol intitulat „Asupra eredităţii morbide şi a predispoziţiei la demenţă ale omului de geniu", în care susţinea că, asemenea înclinaţiei spre moarte timpurie, genialitatea era şi ea o caracteristică a unui bagaj genetic inferior. Pe o bază mai solidă, cercetările recente sprijină asocierea generală a creativităţii cu psihopatologia. Spre exemplu, psihologul Arnold Ludwig a analizat vieţile12 a peste o mie de persoane creative şi a găsit că circa 28% dintre savanţii proeminenţi au suferit cel puţin un fel de tulburare mintală. Procentajul creştea la un ameţitor 87% în cazul marilor poeţi. Psihologul Donald MacKinnon, pe atunci la Institutul pentru cercetarea şi evaluarea personalităţii de pe lângă Universitatea din California, Berkeley, a făcut o evaluare psihometrică extensivă a multor matematicieni, arhitecţi şi scriitori creativi. Rezultatele au arătat că oamenii creativi13 înregistrează sistematic punctaje mai ridicate la întrebările care indică diverse afecţiuni afective, cum ar fi schizofrenia, depresia şi paranoia. Concluzia ce se trage din aceste studii şi din numeroase altele similare este, în cuvintele psihologului Dean Keith Simonton de la Universitatea din California, că „legătura geniu-nebunie ar putea fi mai mult decât un mit". Trebuie să observ că, la fel ca în cazul lui Galois, rareori s-a întâmplat ca nivelurile de afecţiune să fie atât de ridicate încât să debiliteze persoana în cauză. Galois şi multe alte genii creative

posedau suficientă tărie de caracter şi alte resurse mintale pentru a-i ajuta să ţină sub control propria psihopatologie. Dar dovada în sprijinul acestui contract faustic pe care minţile creative trebuie adeseori să-l negocieze este destul de convingătoare. Eseistul englez Sir Max Beerbohm14 (1872 – 1956) a exprimat astfel experienţa proprie cu acest fenomen: „N-am cunoscut niciun om de geniu care nu avea de plătit, cu vreo suferinţă sau vreun defect fizic ori spiritual, pentru ceea ce îi dăduseră zeii".

Oricât de perfectă ar fi potrivirea lui Galois cu profilul unui geniu creativ, trebuie să ne întrebăm dacă nu cumva creierul său nu avea şi vreo calitate cu totul deosebită.

Povestea a doua creiere

Albert Einstein a murit pe 8 aprilie 1955, la Spitalul Princeton din New Jersey. Thomas S. Harvey, patologul care a efectuat autopsia, a scos creierul marelui savant, l-a disecat în 240 de bucăţi şi le-a scufundat pe acestea într-o substanţă asemănătoare cu plasticul, numită celoidină.

Evariste Galois a murit pe 31 mai 1832, la Spitalul Cochin din Paris. Patologul i-a deschis craniul şi a condus o examinare aprofundată a creierului. Acest lucru este cu adevărat uimitor, având în vedere că Galois fusese împuşcat în stomac şi că a murit de peritonită. Mai mult de jumătate din raportul de autopsie era rezervat creierului.

Timp de peste două decenii15, nimeni, nici măcar familia lui Einstein, n-a ştiut că, în casa lui Harvey, creierul savantului era ţinut în nişte borcane. În 1978, Steven Levy, pe atunci reporter la *New Jersey Monthly,* l-a urmărit pe Harvey până la casa sa din Wichita, Kansas. După o lungă conversaţie cu reporterul, Harvey a admis că avea creierul. Dintr-o cutie etichetată „Cidru Costa", el a scos două borcane ce conţineau acel creier, care produsese o revoluţie în ştiinţă.

De atunci, cu permisiunea lui Harvey, trei echipe au examinat diverse părţi ale creierului. Anatomistul Marian Diamond de la Universitatea din California, Berkeley, şi colegii săi au publicat un articol pe această temă în 1985.

Ei au constatat că, într-o parte a creierului lui Einstein, raportul dintre neuroni şi nevroglii16 (celulele care sprijină şi protejează neuronii) era mai mic decât în cazul a unsprezece creiere normale. Deşi autorii au conchis că numărul mare de nevroglii pe neuron ar putea indica faptul că neuronii lui Einstein munceau mai mult – aveau nevoie de mai multă energie – decât normal, această interpretare a fost pusă ulterior sub semnul întrebării17 de alţi cercetători. Un al doilea articol, de Britt Anderson de la Universitatea din Alabama, Birmingham, a fost publicat în 1996. Anderson şi Harvey au arătat18 că, deşi creierul lui Einstein avea o greutate inferioară celei medii (1 230 de grame în comparaţie cu 1 400 grame, în medie), el cuprindea mai mulţi neuroni pe unitatea de suprafaţă. În sfârşit, în 1999, neuropsihologul Sandra Witelson şi colegii ei de la Universitatea McMaster 19 au descoperit o potenţială cheie a genialităţii lui Einstein. S-a constatat că regiunea parietală inferioară, despre care se crede că este utilizată pentru raţionamente matematice, era cu 15% mai largă decât normal. În plus, s-a observat că un şanţ cerebral (scizura centrală) lipsea parţial din acea zonă. Cercetătorii argumentau că absenţa şanţului ar fi putut avea drept rezultat o comunicaţie mai eficace între neuroni. Deşi interesantă, toată această cercetare nu poate fi considerată drept concluzivă. La urma urmei, deşi studiul lui Witelson utiliza treizeci şi cinci de creiere ca grup de control, nu avea decât unul singur în grupul experimental – cel al lui Einstein.

Restul fragmentelor din creierul lui Einstein au fost duse în cele din urmă de Harvey la locul lor final de odihnă – Departamentul de Patologie al Spitalului Princeton. Întrebat de ce se zbătuse să găsească acest creier (corpul lui Einstein fusese incinerat), Harvey a explicat că s-a simţit obligat să salveze pentru posteritate preţioasa materie cenuşie.

În raportul de autopsie, despre creierul lui Galois se poate citi20:

Despuiat de scalp, craniul prezintă cele două piese ce

formează osul coronal la copiii mici unite sub un unghi obtuz. Acesta are o lăţime de cel mult jumătate de centimetru. La muchia unde osul coronal suturează oasele parietale, se poate vedea o depresiune adâncă, plată, circulară, care urmează linia de alipire a celor două oase; boltiturile parietale sunt foarte dezvoltate, larg depărtate una de alta; dezvoltarea acestei porţiuni este remarcabilă, prin comparaţie cu osul occipital…

Odată ce craniul este deschis, pereţii interiori ai sinusurilor frontale sunt foarte apropiaţi; spaţiul rămas este mai mic de o jumătate de centimetru; în mijlocul domului craniului, două depresiuni corespund boltiturilor descrise mai sus.

Creierul este greu, circumvoluţiunile sale sunt largi, iar scizurile, adânci, în special pe părţile laterale; există protuberanţe ce se potrivesc cu cavităţile craniului; una în faţa fiecărui lob anterior, două pe faţa superioară; substanţa cerebrală este în general moale; cavităţile ventriculare sunt mici, lipsite de orice fluide seroase; glanda pituitară este voluminoasă şi conţine granulaţii cenuşii; cerebelul este mic; greutăţile celebrului şi a cerebelului, luate împreună, ajung la aproape 1 530 de grame.

De ce a examinat patologul atât de aprofundat creierul lui Galois când cauza morţii era evidentă? Prima propoziţie din raport poate furniza o indicaţie: „Tânărul Galois Evariste, 21 de ani, un bun matematician, cunoscut mai cu seamă pentru imaginaţia sa înflăcărată, tocmai a sucombat în 12 ore de peritonită acută, cauzată de un glonţ tras de la 25 de paşi”. Presupunerea mea este că patologul era împins de aceeaşi curiozitate care-l determinase şi pe Harvey să ia creierul lui Einstein. Patologul era conştient atât de reputaţia lui Galois ca matematician, cât şi de imaginaţia sa pătimaşă, mistuitoare, şi se simţea îndemnat să-i examineze creierul, pentru potenţiale indicii privitoare la originea acestor atribute. Ca şi în cazul lui Einstein, autopsia nu a dezvăluit clar niciun „revolver fumegând”. Totuşi, acesta era

probabil un efort care merita făcut, fiindcă scopul său era de a dezvălui mintea unei persoane ce se situa, atât în matematică, cât şi în politică, în inima romantismului revoluţionar.

Indivizibil

Spre deosebire de majoritatea celorlalte ştiinţe, în matematică, ideile au o valoare durabilă. Concepţiile lui Aristotel despre univers sunt curiozităţi istorice interesante, dar nimic mai mult. Teoremele din *Elementele* lui Euclid, pe de altă parte, sunt astăzi la fel de valabile, de corecte şi de nemuritoare ca în anul 300 î.Hr. Dar asta nu înseamnă că matematica stagnează. Departe de aşa ceva. Aşa cum noile generaţii de telescoape ne lărgesc orizonturile fără a invalida neapărat descoperirile anterioare din universul apropiat, matematica dezvăluie şi ea noi privelişti, în vreme ce se dezvoltă pe cunoaşterea existentă. Perspectivele se pot schimba, însă nu şi adevărurile. Matematicianul şi autorul Ian Stewart a exprimat21 frumos această realitate: „De fapt, în matematică există un cuvânt pentru rezultate anterioare care sunt schimbate ulterior: ele se numesc «greşeli»”.

Ideile lui Galois, cu toată strălucirea lor, n-au apărut din senin. Ele şi-au tras seva dintr-o problemă ale cărei rădăcini puteau fi urmărite în trecut, tocmai până în anticul Babilon. Şi totuşi, revoluţia pe care a început-o Galois a reunit întregi domenii, care anterior nu avuseseră nicio legătură. Destul de asemănător cu explozia cambriană – acel uimitor val de diversificare a formelor de viaţă de pe pământ – sistemul de abstractizare introdus de teoria grupurilor a deschis ferestre spre o infinitate de adevăruri. Între domenii atât de depărtate între ele ca legile naturii şi muzica au apărut deodată misterioase conexiuni. Turnul lui Babel al simetriilor s-a contopit miraculos într-o singură limbă.

Web-designerul Brenda C. Mondragón administrează un atractiv site, intitulat22 „Neurotic Poets” („Poeţi nevrotici”). Primul ei rând despre poetul romantic englez Percy Bysshe Shelley (1792 – 1822) spune că: „Spiritul

revoluţiei şi puterea gândirii libere erau cele mai mari pasiuni din viaţa lui Percy Shelley”. S-ar putea întrebuinţa exact aceleaşi cuvinte pentru a-l descrie pe Galois. Pe una dintre paginile pe care le-a lăsat Galois pe pupitrul său înainte de a se duce la acel fatidic duel, găsim o fascinantă amestecătură de mâzgăleli matematice, întreţesute cu idei revoluţionare (figura 106). După două rânduri de analiză funcţională, vine cuvântul „indivizibil”, care pare să se aplice la matematică. Acest cuvânt este urmat, totuşi, de lozincile revoluţionare „unité, indivisibilité de la république” („unitate, indivizibilitate a republicii”) şi „Liberté, égalité, fraternité ou la mort” („Libertate, egalitate, fraternitate sau moartea”). După aceste proclamaţii republicane, ca şi cum totul ar face parte dintr-un neîntrerupt gând, analiza matematică se reia. Clar, în mintea lui Galois, conceptele de unitate şi de indivizibilitate erau la fel de valabile pentru matematică şi spiritul revoluţionar. Într-adevăr, teoria grupurilor realiza exact acest lucru – o unitate şi indivizibilitate a modelelor subiacente unei largi game de discipline, aparent fără legătură între ele.

Figura 106

Există şi alte două grupuri de cuvinte care atrag atenţia între mâzgălelile lui Galois. Unul, „Pas l'ombre", se referă aproape cert la „pas l'ombre d'un doute" („fără umbra nici unei îndoieli"). Din nou, Galois ar fi putut avea astfel de convingeri cu privire atât la corectitudinea demonstraţiilor sale matematice, cât şi la idealurile lui republicane. Al doilea grup, „une femme" („o femeie") este o tristă aducere-aminte a circumstanţelor supărător de banale ce aveau să-i cauzeze prematura moarte numai câteva ore mai târziu.

Faimosul poet indian Rabindranath Tagore23 (1861 – 1941) scria că „moartea nu-i stingerea luminii. Ea este suflarea în lampă, fiindcă au venit zorile". Acest lucru era cert adevărat în cazul lui Galois. Ideile sale anunţau zorile unei noi ere în matematică. El aparţine foarte exclusivistului club al acelora care sunt autentic nemuritori.

Generaţii întregi de tineri matematicieni, mişcaţi de

tragica poveste şi de moartea fără rost a lui Galois, au găsit consolare în incredibilul său testament. Prin această satisfacţie, ei au fost scutiţi de soarta unora dintre tinerii mai impresionabili care, cu câteva decenii înainte de timpul lui Galois, citiseră capodopera *Suferinţele tânărului Werther,* a lui Goethe. Romantica agonie a sensibilului protagonist al acestei cărţi atinsese o coardă universală. Povestea era aşa de impresionantă, încât a inspirat o serie de sinucideri în rândul tineretului din toată Europa. Poate că s-ar putea crede că asemenea trăiri emoţionale au dispărut din lumea noastră, mult mai cinică. Şi totuşi, revărsarea spontană de mâhnire ce a urmat morţii Prinţesei Diana a demonstrat că romantismul n-a murit încă. Povestea lui Galois continuă °i astăzi să întristeze şi să inspire, iar spiritul operei sale penetrează mare parte din matematica modernă. Nu pot găsi cuvinte mai bune pentru a descrie acest contrast dintre perisabilitatea cărnii şi rezistenţa ideilor decât pe cele din poemul lui Emily Dickinson24:

Moartea-i un Dialog între Spirit şi Ţărână.
„Descompune" spune Moartea – Spiritul, „Doamnă.
Un alt Crez am „ – Problema ridicată de un joc de cărţi

Iată o soluţie a problemei din pagina 32. Scopul este de a aranja valeţii, reginele, regii şi asii într-un dreptunghi, astfel încât pe oricare rând, coloană sau pe cele două diagonale principale să nu apară de două ori o suită sau o valoare.

Rezolvarea unui sistem de două ecuaţii liniare

5

La pagina 65, am întâlnit sistemul de ecuaţii de pe vremea anticului Babilon:

1

— $Y + x = 7\ 4\ J$

$x + y = 10$

Haideţi să ne amintim cum se rezolvă asemenea sisteme de ecuaţii. O metodă relativ directă presupune izolarea unei necunoscute dintr-o ecuaţie şi substituirea ei în cealaltă ecuaţie. Astfel, sistemul se reduce la o ecuaţie cu o singură necunoscută. În exemplul dat, putem scădea y din ambii membri ai ecuaţiei a doua, transformând-o în:

$x = 10 - y$

Putem acum înlocui x în prima ecuaţie, obţinând:

1

— *Y* + 10 – *y* = 7 4

sau, cumulând termenii care-l conţin pe *y*.

3

y + 10 = 7

3 J

Scăzând 10 din ambii membri:

— 7 y = – 7

Acum, înlocuind valoarea lui *y* în *x* = 10 – *y*, obţinem: *x* = 6. Ca atare: soluţia este: lungimea = 6; lăţimea = 4.

Soluţia lui Diofant

5

Aceasta reprezintă soluţia lui Diofant la problema a 28-a din primul volum al lucrării *Aritmetica* (menţionată la pagina 72).

Trebuie să găsim două numere astfel încât suma lor şi suma pătratelor lor să fie nişte numere date. Să presupunem că suma este 20 şi că suma pătratelor este 208. Diofant nu notează numerele cu *x* şi y, ci cu 10 + *x* şi 10 – *x*, profitând de faptul că suma trebuie să fie 20. Ecuaţia pe care el o obţine pentru suma pătratelor este de aceea:

(10 + x) 2 + (10 – x) 2 = 208

(10 + x) (10 + x) = 100 + 20 x + *x*2 (10 – x) (10 – x) = 100 – 20 x + x2

ecuaţia devine (după reducerea termenilor asemenea şi însumarea celorlalţi):

200 + *2 x2* = 208

Scăzând 200 din ambii membrii: 2 x2 = 8

Împărţind la 2: x2 = 4

Extrăgând rădăcina pătrată pozitivă: *x* = 2.

De aceea, cele două numere căutate sunt 12 şi 8.

ANEXA 4

O ecuaţie diofantică

5

Trebuie să găsim soluţii întregi (de genul numerelor 1, 2, 3...) pentru ecuaţia (pagina 72) următoare:

29 x + 4 = 8 y

Putem scădea 4 din ambii membri, pentru a obţine:

29 x = 8 y – 4

Scoţând factorul comun 4 ai ambilor termeni din membrul drept, rezultă:

29 x = 4 (2 y – 1)

Deoarece *x* trebuie să fie un număr întreg şi membrul stâng este divizibil cu 29, la fel trebuie să fie şi membrul drept. Totuşi, 29 este un număr prim (divizibil numai cu 1 şi cu el însuşi); de aceea, 2 y – 1 trebuie să fie divizibil cu 29. În particular, am putea lua:

2 y – 1 = 29 şi *x* = 4 (pentru ca egalitatea să fie adevărată).

Adunând 1 la ambii membri ai lui 2 y – 1 = 29 şi împărţind la 2, avem *y* = 15. De aceea, una dintre soluţii este: *x* = 4, *y* = 15.

ANEXA 5

Versurile şi formula

5

lui Tartaglia

Regulile lui Tartaglia pentru rezolvarea celor trei forme ale cubicei erau puse în versuri (pagina 82). Traducerea de mai jos este după versiunea în limba engleză a lui Ron G. Keightley:

Atunci când cubul şi necunoscuta împreună fac un număr întreg, cunoscut:

Găseşte-ntâi două numere diferind la fel;

Produsul lor, atunci, ca şi faima lor comună;

Va fi egal cu o treime, la cub, din necunoscută;

Resturile rădăcinilor lor cubice Scăzute cum trebuie vor da, în sfârşit.

Valoarea necunoscutei, negreşit!

Cât priveşte a doua chestiune de felul acesta.

Când un cub într-un singuratic membru vei găsi.

Ceilalţi termeni fiind împreună legaţi:

Două numere din acesta unul, odată ce-s descoperite, înmulţite, iute ca pasărea n zbor.

Dau produs clar şi simplu, de o treime la cub a necunoscutei; cu regula ştiută, ia-le Rădăcina cubică;

adună-le, de vrei.

Să-ţi afli tu obiectul în suma lor uşor.

Al treilea caz, acum în micile noastre sume.

Din a doua e rezolvat; căci, anume în felul lui e acelaşi, îţi spun!

Aceste lucruri le-am găsit – să nu spun asta prea târziu – în anul de trei ori cinci sute treizeci şi patru Al epocii noastre; galanta demonstraţie-i ţinută Unde oraşu-i încins de al Adriaticii ţărm.

Dacă ecuaţia cubică este de forma: x3 + *px* = q, unde *p* şi *q* sunt orice numere (de ex., x3 + bx = 20), formula de rezolvare dal Ferro-Tartaglia-Cardano este dată de oarecum intimidanta expresie:

De pildă, având *p* = 6 şi *q* = 20 ca în exemplul de mai sus (şi luând în considerare doar rădăcinile pătrate pozitive), obţinem soluţia pozitivă *x* = 2.

Dar să examinăm şi ecuaţia studiată de Bombelli (pagina 94):

x3 – 15 x = 4

Aici, *p* = – 15, *q* = 4. Puteţi verifica lesne că, substituind aceste valori în formulă, obţineţi:

x = 2 W-121 + 2 – V-121.

În acest caz, pasul intermediar presupune calcularea rădăcinii pătrate a numărului negativ – 121. Şi totuşi, este suficientă o simplă privire pentru a ne da seama că *x* = 4 este una dintre soluţii. Deşi Bombelli a reuşit să rezolve această ecuaţie particulară utilizând un artificiu ingenios, problema generală a tratării rădăcinilor pătrate din numere negative nu a fost rezolvată decât odată cu introducerea numerelor complexe.

Artificiul lui Bombelli a fost următorul: Se scrie

V_2 + V-121 = 2 + cv-T

unde valoarea lui *e* trebuie determinată. Se ridică ambii membri ai acestei ecuaţii la puterea a treia. Rezultă:

2 + V-121 = (2 + cv-l) 3.

Fiindcă rădăcina pătrată a lui 121 este 11, membrul stâng este egal cu 2 + 11V-1. Membrul drept poate fi dezvoltat, utilizând identitatea:

(a + b) 3 = a3 + *3 z* + *3 ab2* + b3

pentru a da: 8 + 12 cv – T-6 c2 – c3V-1.

Egalând cei doi membri şi reducând termenii asemenea, obţinem:

2 + iW-1 = (8 – be 2) + (12 c – c3) V-1.

Încercând să-i dăm lui *e* diferite valori, observăm că această ecuaţie este adevărată pentru *e* = 1. Din substituţia lui Bombelli găsim de aceea că:

2 + V-121 = 2 *+ 4 – 1*.

Utilizând o substituţie similară, Bombelli a găsit că:

V_2 – V-121 = *2 – 4 – 1*.

Substituind ambele expresii în formula lui *x*, Bombelli a dat soluţia:

x = 2 + V-I + *2 – 4 – 1* = 4.

Provocarea lui Adriaan van Roomen

Ecuaţia prezentată de van Roomen era (pagina 96):

x45 – 45 x43 + 945 x41 – 12300 x39 + 111150 x37

- 740459 x35 + 3764565 x33
- 14945040 x31 + 469557800 x29 – 117679100X27

+ 236030652 x25 – 378658800 x23 + 483841800 x21

- 488494125 x19 + 384942375 x17 – 232676280 x15

+ 105306075 x13 – 34512074X11 + 7811375 x9

- 1138500 x7 + 95634 x5 – 3795 x3 + 45 x = *C*

unde *C* este un număr cunoscut. În particular, el a cerut o soluţie pentru:

e = – |*4* V16 V 8 V 64

Viete, care ştia deja formula pentru sinus şi cosinus de na (unde *n* este orice număr întreg, iara este un unghi oarecare), se putea folosi de ea. El şi-a dat seama că membrul stâng al ecuaţiei este expresia pentru 2 sin45 a, dacă se exprimă în funcţie de 2 sina. De aceea, simpla găsire a valorii lui a astfel încât 2 sin45 a = *C* dă soluţia ecuaţiei lui van Roomen ca fiind *x* = 2 sina.

330 ECUAŢIA CARE N-A PUTUT FI REZOLVATĂ

vedem că

± V (x1 + x2) 2 – 4 x1 x2 = ± (x1 – x2)

şi de aceea

$$[(x1 + x2) \pm \sqrt{(x1 + x2)^2 - 4\,x1\,x2}] = \pm 2[(x1 + x2) \pm (x1 - x2)]$$

de unde rezultă *x1* (dacă se alege semnul „+ ”) şi *x2* (dacă se alege semnul „— ”).

Arborele genealogic al lui Galois

Dinspre partea paternă a lui Évariste, n-am descoperit decât următoarele rude, începând cu bunicul său:

Jacques Olivier Galois (bunicul lui Évariste)

Născut în 1742, la Ozouer-le-Voulgy (Seine-et-Marne) Căsătorit cu Marie-Jeanne Deforge (bunica lui Évariste) Mort la Bourg-la-Reine, pe 12 mai 1806

Bunicii lui Évariste aveau şase copii:

Marie Anne Olivier Galois Născută pe 3 noiembrie 1768 Căsătorită cu Joseph Martin Blondelot

Marie Antoinette Galois Născută pe 20 octombrie 1770 Căsătorită cu Denis François Le Guay

Théodore Michel Galois

Născut pe 14 martie 1774

Căsătorit cu Victoire Antoinette Grivet

Nicolas-Gabriel Galois (tatăl lui Évariste)

Născut pe 3 decembrie 1775

Căsătorit cu Adélaïde Marie Demante (mama lui Évariste) Mort pe 2 iulie 1829

Maria Pauline Galois Născută pe 7 septembrie 1778 Căsătorită cu André Robert Hyard

Jacques Antoine Raphaël Galois Născut în 1781

Auffray (2004) listează un alt fiu – Jean Baptiste Olivier –, dar nu i-am găsit numele în listele din Bourg-la-Reine. El scrie, de asemenea, numele mijlociu al penultimei fiice Apolline (în loc de Pauline).

Nicolas-Gabriel Galois şi Adélaïde Marie Demante

aveau trei copiii:

Nathalie Théodore Galois Născută pe 26 decembrie 1808 Căsătorită cu Benoît Chantelot

Évariste Galois

Născut pe 25 octombrie 1811

Mort pe 31 mai 1832

Alfred Galois

Născut pe 18 decembrie 1814 Căsătorit cu Pauline Chantelot.

Generaţiile următoare arată după cum urmează:

Natalie (1808?) Évariste (1811 – 1832) Alfred (1814?)

Pauline (1833 – 1901) Elizabeth (1843 – 1855)

Căsătorită cu Felix Guinard

I

Nathalie (? – 1877)

Arborele genealogic direct dinspre partea maternă a lui Évariste este:

Michel de Mante

Căsătorit cu Barbe de Criquebeuf

I

Pierre de Mante (1590 – 1670)

Căsătorit cu Anne Bréard

Au avut zece copii, din care cel de-al zecelea este:

François Demante (1645 – 1711)

Căsătorit cu Marguerite de Gruchy

Au avut paisprezece copii, din care cel de-al paisprezecelea este:

I

Michel Demante (1692 – 1766)

Căsătorit cu Anne Marguerite Leclerc

Au avut paisprezece copii, din care cel de-al şaselea este:

I

François Demante (1723 – 1790)

Căsătorit cu Marie-Madeleine Martin Au avut doi copii; fiica a murit tânără

I

Thomas François Demante (1752 – 1823)

Căsătorit cu Marie Thérèse Élisabeth Durand

Căsătorită a doua oară cu Jean François Loyer

Am o bogată paletă de informaţii cu privire la generaţiile ce le-au urmat lui Antoine-Marie Demante şi Celeste-Marie Demante, dar nu o prezint, întrucât nu este direct legată de Galois.

ANEXA 9

Puzzle-ul 14 – 15

Configuraţia iniţială a puzzle-ului 14 – 15 a lui Samuel Lloyd (pagina 184):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

poate fi măguraţia schimbată în co următoare

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

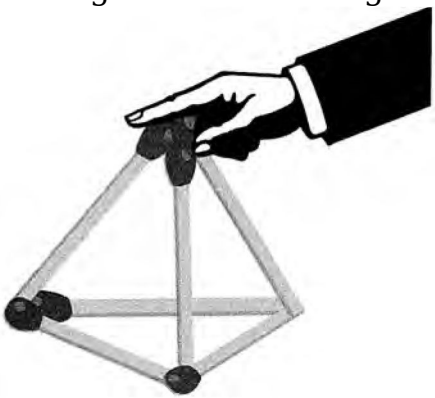
utilizând 44 de mişcări. Numerele următoare indică ce piesă (în ordine) trebuie deplasată prin alunecare în locul gol: 14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7, 4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13, 9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14, 10, 6, 2, 1.

ANEXA 10

Soluţia problemei chibriturilor

Cu cele şase chibrituri de lungime egală din Figura 105 (pagina 311), trebuie să formăm patru triunghiuri cu

toate laturile egale. Tendinţa naivă este de a încerca rezolvarea problemei în două dimensiuni (cu chibriturile etalate pe suprafaţa mesei), unde nu există soluţie. Soluţia „din afara cutiei” este de a construi un tetraedru în trei dimensiuni (ca în figura de mai jos). Astfel se formează automat patru triunghiuri cu laturi egale.



Note

1. SIMETRIA

Două excelente cărţi de popularizare a simetriei în general sunt cele scrise de Stewart (2001) şi de Stewart şi Golubitsky (1992). O carte extrem de recomandabilă de popularizare a simetriei în fizică este cea a lui Zee (1986). Ceva mai tehnice, cu privire la simetria în ştiinţă, sunt cărţile lui Rosen (1995) şi Icke (1995). Simetria în chimie este bine descrisă în cartea lui Heilbronner şi Dunitz (1993). O carte extrem de bine documentată asupra simetriilor în diferite culturi este cea a lui Washburn şi Crowe (1988). Cartea lui Evans (1975) examinează simetriile în ornamentele vest-europene. Două nepreţuite culegeri de articole ceva mai tehnice asupra simetriei sunt cele ale lui Hargittai (1986 şi 1989). O extinsă analiză tehnică a simetriei în ştiinţă şi artă poate fi găsită cartea lui Shubnikov şi Koptsik (1974). O carte cu multe exemple este cea al lui W alser (2000). În fine, cartea lui Weyl (1952) rămâne o referinţă clasică.

1 *… faimosul test Rorschach*: Loftus (2001); Wood, Nezworski, Lilienfeld şi Garb (2003).

2 *… Naşterea lui Venus* de Botticelli: Gombrich (1995).

3 *Cuvântul* simetrie *are rădăcini antice*: Nagy (1995); *Oxford English Dictionary* (1978).

4 *… arhitect roman Vitruviu*: Vitruviu cca. 27 î.Hr.; Osborne (1952).

5 *… semnificaţia modernă a simetriei*: Descrieri clare pot fi găsite la Rosen (1975) şi Stewart şi Golubitsky (1992).

6 *Să examinăm de pildă versurile*: Shubnikov şi Koptsik (1974).

7 *Grupurile de cuvinte cu această proprietate se numesc* palindromuri: Bergeron (1973); Gardner (1979).

8 *„Able was I ere I saw Elba”*: Fayen (1977).

9 *… structura cromozomului masculin Y*: Skaletsky şi alţii (2003); Willard (2003); Rozen şi alţii (2003); Pagan Westphal (2003).

10 *… simetriei, bilaterale, care caracterizează regnul animal*: Comentarii excelente pot fi găsite în Weyl (1952); Gardner (1990); Gregory (1997); Corballis şi Beale (1976).

11 *… un umorist din Chicago*: „Senatorul” Clarke Crandall, descris în Gardner (1990).

12 *O superinteligenţă computerizată*: Argumente excelente sunt prezentate în Kurzweil (1999).

13 *… „The snowstorm”*: Emerson (1847).

14 *Faimosul astronom Johannes Kepler*: Kepler (1966).

15 *. simetrie de rotaţie*: Comentarii asupra ei pot fi găsite, de pildă, în Weyl (1952); Boardmann, O’Connor şi Young (1973).

16 *… pictorul James McNeill Whistler*: Whistler (1890).

17 *Clive Bell*: Bell (1997).

18 *Teoreticianul estetician Harold Osborne*: Osborne, (1952, 1986).

19 *Psihologii Peter G. Szilágyi şi John C. Baird*: Szilágyi şi Baird (1977).

20 *… George David Birkhoff*: Wilson (1945); O’Connor şi Robertson (2001 b).

21 *… Măsura Estetică*: Birkhoff (1933).

22 *O brăţară din fildeş de mamut*: Menţionată de Wolfram (2002).

23 *… desenele fantasticului grafician*: O superbă descriere a operei lui Escher găsiţi în Schattschneider (2004).

24 *… William Morris*: Trei cărţi bune asupra vieţii şi operei lui sunt, de pildă, cele scrise de Parry (1996), MacCarthy (1995) şi Menz (2003).

25 *… Frumuseţea Vieţii*: Hares-Stryker (1997).

26 *… simetria de translaţie în muzică*: Wilson (1986).

27 *.. . cristalograful rus G.V. Wulff*: Shubnikov şi Koptsik (1974).

28 *Asocierea lui Mozart cu simboluri matematice*: Există multe referinţe, printre care: Hyatt King (1944); Tovey (1957); Mozart (1966); Hyatt King (1976); Putz (1995).

29 *… Johann Sebastián Bach*: Descrieri detaliate ale vieţii şi muzicii lui, ca şi conexiuni cu matematica, pot fi găsite în Schweitzer (1967); Altschuler (1994); Wolff (2001); Wilson (1986); Smith (1996).

30 *… reflexie cu translaţie*: De exemplu, în Wasburn şi Crowe (1988).

31 *. Pătrate latine*: Descrieri la nivel de popularizare pot fi găsite în Peterson (2000); Gardner (1959 a); la un nivel mai ştiinţific, în Ball şi Coxeter (1974).

32 *Permutările apar în circumstanţe extrem de diverse*: J. Rosen (1995); Boardman, O'Connor şi Young (1973).

33 *… Charles Lamb*: Lamb (1823).

34 *Jucătorii de ruletă*: Fabricând (1989).

35 *Perspectiva de câştig*: Să presupunem că pariaţi pe un anumit număr roşu. Atunci, *în medie,* puteţi spera să câştigaţi de 18 ori la fiecare 38 de pariuri. În celelalte 20 de pariuri veţi pierde. Dacă toate pariurile sunt pe 1$, atunci din 38 de pariuri, vă puteţi aştepta să pierdeţi 2$ (există 18 câştiguri şi 20 de pierderi). Bilanţul net este deci o *pierdere* de 2$ pentru parierea a 38$, iar *aşteptarea* (pierderea la fiecare dolar pariat în multe jocuri) este 2$ la fiecare pariu de 38 $ sau, mai exact, de 5, 3 cenţi.

36 *... Principiul excluziunii al lui Pauli*: O scurtă descriere poate fi găsită în Gamow (1959).

37 *... transformările de culoare*: Rosen (1975); Loeb (1971).

38 *Escher însuşi n-a ştiut prea bine niciodată*: Citatul apare în prefaţa lui MacGillavry (1976).

2. IITNIM IIHCO NÎ EIRTEMIS

1 *... fotografie făcută cu Telescopul Hubble*: Brown şi alţii (2003).

2.. . *vedere stereoscopică*: Julesz (1960); Brindley (1970); Pinker (1997); Goldstein (2002); Wheatstone (1838).

3 *În două cărţi remarcabile*: Cărţile lui Kepler, *Astronomiae Pars Optica* (publicată în 1604) şi *Dioptrice* (publicată în 1611), fac parte din *Opere Complete*; v. Caspar şi Hammer (1937).

4 *... Charles Wheatstone*: Bowers (2001).

5 *. psihologia gestaltistă*: Descrierea principiilor ei poate fi găsită în Wetheimer (1912); Palmer (1999); Goldstein (2002); Barry (1997).

6 *Garner şi Palmer au recunoscut în special*: Garner (1974); Palmer (1991).

7 *... teoria informaţiei structurale*: Leeuwenberg (1971); Buffart şi Leeuwenberg (1981); van der Helm şi Leeuwenberg (1991).

8 *profetul biblic Amos*: Amos 3: 3.

9 *... regiunii comune, conexiunii şi sincroniei*: Un foarte bun rezumat în Palmer (1999).

10 *Aşa cum a spus cândva Oscar Wilde*: Wilde (1892).

11 *... rolul important al simetriei în percepţie*: Fox (1975); Howe (1980); Palmer şi Hemenway (1978)

12 *... psihologii, Jennifer Freyd şi Barbara Tversky*: Freyd şi Tversky (1984).

13 *... Ioannis Paraskevopoulos*: Paraskevopoulos (1968).

14.. . *rezonanţa magnetică nucleară (RMN) pentru realizarea unor hărţi ale ariilor cerebrale*: Tyler (2002); Tootell şi alţii (1998); Mendola şi alţii (1999).

15 *Relaţia dintre simetrie şi orientare*: Descrieri

detaliate pot fi găsite în Rock (1973); Marr (1982); Corballis (1988); Tarr şi Pinker (1989); Palmer (1999).

16 *... filosoful moravo-austriac Ernst Mach*: Mach (1914).

17 *... autostereograme generate pe calculator*: Tyler (1983, 1995); N.E. Thing Enterprises (1995).

18 *Biologul Thomas Henry Huxley*: Huxley (1868).

19 *O simetrie a legilor*: Discuţii de popularizare a simetriilor legilor naturii pot fi găsite, de exemplu, în Weinberg (1992); Zee (1999); Livio (2000); Greene (2004); Kane 2000; Lederman şi Hill (2004).

20 *Teoria grupurilor*: Există multe manuale de teoria grupurilor, dar foarte puţine la nivel de popularizare sau semipopularizare. Scurte prezentări de acest tip pot fi găsite, de exemplu, în Stewart (1995) şi Devlin (1999, 2002). O excelentă şi cuprinzătoare descriere la un nivel încă destul de elementar (dar nu de popularizare) se găseşte în Budden (1972). Alte cărţi de nivel elementar sunt: Gardner (1966); Maxwell (1965); McWeeny (2002). A se vedea notele la Capitolul 6 pentru alte cărţi, mai avansate.

3. SĂ NU UITAŢI NICIODATĂ ACEST LUCRU CÂND VĂ CUFUNDAŢI PRINTRE ECUAŢIILE VOASTRE

1 *... „Ştiinţă şi Fericire”*: Citatul apare în Calaprice (2000).

2 *... babilonienii nu foloseau acest concept*: Calinger (1999); van der Woerden (1983); Boyer (1991); O’Connor şi Robertson (2001 a); Kline (1972).

3 *... cunoştinţele noastre asupra matematicii egiptene*: Gillings (1972); Calinger (1999); O’Connor şi Robertson (2000 a, b, c); Newman (1956).

4 *Problema 79 sună aşa*: Wells (1997); Gillings (1972).

5 . Mama Gâscă: Newman (1956).

6 *... culegerea chinezească* Nouă Capitole asupra Artei Matematice: van der Woerden (1983).

7 ... *deputatul Tony McWalter a explicat*: În şedinţa din 26 iunie 2003.

8 *Disperat, omul s-a dus la rabinul Huna*: Gandz (1940 a).

9 *Istoricul grec Polibiu*: Gandz (1940 b).

10 *… a doua problemă de pe tăbliţa numărul 13901 de la British Museum*: Berriman (1956).

11.. . algebră geometrică: Acest popular gen matematic este descris în van der Woerden (1983); Heath (1956, 1981); Gandz (1937).

12 *Unul dintre cei mai originali gânditori ai Alexandriei a fost Diofant*: O parte din fascinanta lui matematică poate fi găsită în Turnbull (1993); Crossley (1987); Crossley (1987); Gow (1968); van der Woerden (1983); Vogel (1972).

13… Regiomontanus nu-şi ascundea admiraţia: Calinger (1999).

14.. . consideraţi problema a 28-a din primul său volum: van der Woerden (1983).

15 *… Marii teoreme a lui Fermat*: Există câteva cărţi excelente despre marea teoremă a lui Fermat. O frumoasă descriere a istoriei care a condus la demonstraţia lui Andrew Wiles e dată în Singh (1997) şi în Aczel (1996); o expunere scurtă, dar clară a câtorva elemente de demonstraţie poate fi găsită în Devlin (1999); expuneri mai detaliate, pur ştiinţifice, sunt în Edwards (1996); Mozzochi (2004).

16 *Matematicianul şi astronomul Brahmagupta*: van der Woerden (1983); Calinger (1999).

17 *Cel care literalmente i-a dat algebrei numele pe care-l poartă acum a fost Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi*: van der Woerden (1985); Crossley (1987); O’Connor şi Robertson (1999 a).

18 *… Abraham bar Hiyya Ha-nasi*: Levey (1954); O’Connor şi Robertson (1999 b).

19 *… Omar Khayyam*: Yardley (1990); Amir-Moez (1994).

20 *… Maestro Benedetto… Maestro Biaggio şi Antonio Mazzinghi:* van der Woerden (1985); Calinger (1999).

21*… Maestro Dardi*: van der Woerden (1985); Calinger

(1999).

22 *Nu-i de mirare că matematicianul şi autorul Luca Pacioli*: Franci şi Toţi Rigatelli (1985); Taylor (1942); Livio (2002).

23.. . un matematician din Bologna, numit Scipione dal Ferro: van der Woerden (1985); Cardano (1993); Bortolotti (1947); Crossley (1987); Dunham (1991); Rose (1975); Masotti (1972).

24 *. matematicienii erau interesaţi de asemenea confruntări*: al-Nadim (1871 – 72); Crossley (1987).

25 *Niccolò Tartaglia*: Crossley (1987); Rose (1975); van der Woerden (1985); Bortolotti (1933); Di Pasquale (1957 a, b, 1958); Schultz (1984); Masotti (1972).

26 *Zvonurile despre pretenţia lui Tartaglia*: Unii istorici ai matematicii, precum Moritz Cantor (1829 – 1920) în *Prelegeri de istoria matematicii,* şi-au exprimat scepticismul cu privire la capacitatea lui Tartaglia de a redescoperi formula lui dal Ferro. Cantor sugerează că Tartaglia ar fi putut, pur şi simplu, să obţină formula pe sub mână. Alţi istorici, precum Gustav Enestrom, sunt în dezacord cu speculaţia lui Cantor.

27 *… fizicianul, matematicianul, astrologul, cartoforul şi filosoful Gerolamo Cardano*: Descrieri detaliate ale vieţii şi operei sale pot fi găsite în Cardano (1993); Fierz (1983); Ore (1953); Crossley (1987); van der Woerden (1985); Gliozzi (1972); Hale (1994).

28 *„Chiar dacă jocul ar fi din toate privinţele.”*: Ore (1953).

29 *Ludovico Ferrari* (1522 – 1565) *este următorul personaj central:* Candido (1941); Di Pasquale (1957 a, b, 1958); Jayawardene (1972).

30 *Istoria rezolvării*: Istoria ecuaţiilor cubice şi cuartice mai este bine descrisă şi în Gândikin (1988).

31 *Cardano a publicat horoscopurile*: Conform unei legende care este aproape sigur falsă, Cardano s-a sinucis numai pentru a-şi confirma propriul horoscop.

32 *Ea a început cu un alt bolognez, Rafael Bombelli*: van der Woerden (1985); Crossley (1987); Boyer (1991); Rose

(1975); Peste (2003).

33 *Avocatul francez François Viète*: Ritter (1895); Crossley (1987); Peste (2003).

34 *încurcat, regele a apelat la Viète*: Deşi metoda trigonometrică de rezolvare schiţată în Anexa 6 este corectă, e greu de crezut că Viète a fost capabil să găsească efectiv soluţiile în câteva minute.

35 *… scoţianul James Gregory*: O'Connor şi Robertson (2000 d); Whiteside (1972).

36 *… contele german Ehrenfried Walther von Tschimhaus:* O'Connor şi Robertson (1997); Hofmann (1972); Ayoub (1980).

37 *Francezul Étienne Bézout*: O'Connor şi Robertson (2001 a); Tignol (2001).

38 *Leonhard Euler*: Multe surse descriu viaţa şi opera lui Euler. Cele care urmează reprezintă o colecţie de surse în care accentul se pune pe elemente diferite. Youschkevitch (1972 a); O'Connor şi Robertson (1998); Wells (1997); Boyer (1991); Bell (1937); James (2002); Ayoub (1980); Tignol (2001).

39 *… suedezul Erland Samuel Bring*: Youschkevitch (1972 b); O'Connor şi Robertson (1996 a).

40 *… francezul Alexandre-Théophile Vandermonde* (1735 – 1796) *şi englezul Edward Waring*: van der Woerden (1985); Ayoub (1980); Tignol (2001).

41 *Lagrange… s-a născut la Torino*: Există multe referinţe. Cele care urmează pun accentul pe aspecte relevante pentru discuţia de aici: van der Woerden (1985); Bell (1937); James (2002); Ayoub (1980); Kiernan (1971); Novy (1973); Stubhaug (2000); Tignol (2001).

42 *Geniul lui Gauss fusese recunoscut*: Printre numeroasele referinţe excelente, notez: Fine şi Rosenberg (1997); Tignol (2001); Bell (1937); Dorrie (1965); Gray (2004).

43 *Demonstraţia lui Argand*: Fehr (1902).

44 *… Gauss şi-a exprimat scepticismul*: Gauss (1876).

45 *… Jean Étienne Montucla*: Ayoub (1980).

46 *Paolo Ruffini*: Cea mai bună referinţă este Ayoub

(1980); informaţii interesante mai pot fi găsite în van der Woerden (1985); Carruccio (1972); Wussing (1984); Peste (2003).

47 *... matematicianul şi astronomul francez Jean-Baptiste Joseph Delambre*: Ayoub (1980).

48 *... Cauchy, în general rezervat cu complimentele*: Ayoub, 1980.

4. MATEMATICIANUL CHINUIT DE SĂRĂCIE

Există câteva biografii bune ale lui Abel: Una recentă şi foarte bine documentată este cea a lui Stubhaug (2000). Prima biografie importantă a fost scrisă de Bjerknes (1880; în norvegiană), a cărei traducere franceză a apărut sub o formă dezvoltată în 1885. O altă excelentă biografie este cea a lui Ore (1954; în norvegiană), a cărei traducere engleză a apărut în 1957. Alte biografii, mai scurte, le aparţin următorilor autori: Mittag-Leffler (1904; în norvegiană, traducerea franceză a apărut în 1907); James (2002); de Pesloüan (1906); Ore (1972); Peste (2003); o versiune romantică îi aparţine lui Bell (1937). În plus, mai există câteva articole într-un volum memorial publicat cu ocazia centenarului naşterii lui Abel (Holst, Stromer şi Sylow, 1902) şi în altul, de la bicentenarul lui Abel (Laudal şi Piene, 2004). Publicaţiile lui Abel pot fi găsite în Sylow şi Lie (1881).

1 *... Mittag-Leffler* (1846 – 1927) *descria realizările matematice ale lui Abel*: Steiner (2001).

2 *... Emil Artin... scria despre Galois*: Tignol (2001).

3 *Demonstraţia lui Abel este prea ştiinţifică*: Sylow şi Lie (1881); Kiernan (1971); Kline (1972); Novy (1973) Gârding şi Skau (1994). Demonstraţii foarte clare, deşi pur ştiinţifice, sunt prezentate în M.I. Rosen (1995); Dorrie (1965). O excelentă explicaţie, ceva mai puţin ştiinţifică, poate fi găsită în Peste (2003). Asupra ecuaţiei cvintice, a se vedea şi lucrările (mai ştiinţifice) scrise de: Shurman (1997); Spearman şi Williams (1994).

4 *Era găzduit la familia Cotte*: Stubhaug (2000); Auffray (2004).

5.. . *Premiul Abel pentru matematică*: Battersby (2003); Thomas (2001).

5. MATEMATICIANUL ROMANTIC

Există mai multe biografii ale lui Galois. Cea mai recentă şi bine documentată biografie (în franceză) este a lui Auffray (2004). Prima excelentă biografie a fost scrisă de Dupuy (1896). Printre alte biografii bine documentate se numără: Dalmas (1956); Sarton (1921); Rothman (1982 a, b); Taton (1972); Toţi Rigatelli (1996); Astruc (1994); Verdier (2003). Alte biografii şi studii biografice mai scurte sunt: Chevalier (1832); Bell (1937); Davidson (1938); Bărbier (1944); Koliros (1949); Malkin (1963); Hoyle (1977); James (2002). Printre biografiile romanţate se numără: Infeld (1948); Petsinis (1998); Berloquin (1974); Mondor (1954). Materiale interesante pot fi găsite pe Internet, de exemplu, la *Gales 2004* sau *Bychan 2004,* şi în O'Connor şi Robertson (1996 b).

Opera matematică a lui Galois poate fi găsită în multe surse, printre care Liouville (1846); Picard (1897); Tannery (1906, 1907, 1908); Verriest (1934); Bourgne şi Azra (1962); T oti Rigatelli (1996); Verdier (2003); Auffray (2004).

1 Evariste Galois s-a născut: Documente asupra naşterii şi arborelui său genealogic furnizate de Philippe Chaplain de la Muzeul Oraşului Bourg-la-Reine.

2 … Liceul-internat Louis-le-Grand: Donnay (1939).

3 … nu e singura analogie frapantă: Bourgne şi Azra (1962).

4 Richard s-a dovedit a fi, pentru Galois: Terquem (1849).

5 … soluţii care lasă relaţiile neschimbate: Pentru ecuaţia dată drept exemplu, se poate arăta că relaţia rămâne adevărată după efectuarea permutării:

6 … Cauchy trimitea academiei următoarea scrisoare de scuze: Taton (1947, 1971, 1983); Rothman (1982 a, b).

7 … ca examinarea să aibă loc la exact o lună: Dupuy (1896); Bertrand (1899); Verdier (2003).

8.. . nu există logaritmi aritmetici: Examinatorul, Dinet,

se referise, poate, la o noţiune dezvoltată de Gauss în 1821. Aceste obiecte, pe care Gauss le-a numit *indici,* reprezintă în fapt o clasă specială de rădăcini. Aceşti „indici” satisfac toate proprietăţile logariturilor, de aceea ar putea fi consideraţi „logaritmi aritmetici”.

9... dând pe 26 *iulie o infamă serie de ordonanţe*: Bérard (1834); Blanc (1841 – 1844); Burnand (1940); Chenu (1850); Girard (1929).

10 *... Libertatea conducând poporul*: O excelentă descriere poate fi găsită în de Hureaux (1993).

11 *Faimoasa matematiciană Sophie Germain*: Dahan-Dalmédico (1991); Sampson (1900 – 1991); James (2002); O’Connor şi Robertson (1996 c).

12 *Ea adăuga un trist comentariu*: Henry (1879).

13 *Folosind cuvintele lui Dumas*: Dumas (1863 – 1865).

14 *Procedurile legale s-au deschis*: Dalmas (1956); Verdier (2003).

15 *Într-un raport nu prea zelos*: Bertrand (1899).

16 *... prietenul său Ernest Duchatelet*: Auffray (2004); Verdier (2003).

17 *... Scrisori despre închisorile Parisului*: Raspail (1839).

18 *Descrierea făcută de Nerval*: De Nerval (1841, 1855).

19 *Ea începe printr-o persiflare*: Bourgne şi Azra (1962).

20.. . Galois a fost transferat, pe 13 martie: Astruc (1994); Auffray (2004).

21 *... la un cămin de convalescenţi*: Unii din biografii lui Galois au interpretat termenul *„maison de santé”* („casă de sănătate”) ca desemnând o clinică medicală profesionistă. Dar pe vremea aceea expresia se referea de fapt la locuri în care oamenii veneau pentru a se odihni sau chiar pentru a petrece o vacanţă. De obicei, căminele acestea ofereau, într-adevăr, o anumită supraveghere medicală şi aveau un doctor rezident care trata atât probleme fizice, cât şi mintale.

22 *Puţine poveşti de dragoste din istorie*: Bibliothèque de l’Institut, *Manuscrits d’E. Galois,* folio 59; Infantozzi

(1968); Auffray (2004); Dalmas (1956); Astruc (1994); Toţi Rigatelli (1996); Rothman (1982 a, b).

23 *Faptele cunoscute cu privire la activităţile desfăşurate de Galois:* Dupuy (1896); Bourgne şi Azra (1962); Rothman (1982 a, b); Toţi Rigatelli (1996); Auffray (2004); Bărbier (1944).

24 *… Cristospe cruce*: Luca 23: 24.

25 *A treia şi, din perspectivă ştiinţifică, cea mai importantă scrisoare: Revue Encyclopédique* (1832).

26 *… Galois refuză serviciile unui preot*: Comunicat de Gabriel Demante (vărul lui Galois) primului biograf al lui Galois, Paul Dupuy. Victor, fratele lui Galois, era preot, şi el a fost probabil cel ale cărui servicii le-a refuzat Galois.

27 *… certificatul de deces a fost semnat*: Reconstitution des Actes de l'État Civil de Paris; Archives de la Seine.

28 *Pe 31 mai,* Bulletin de Paris *anunţa*: Archives Nationales, folio 7.3886. *Şeful poliţiei Henri-Joseph Gisquet*: Evenimentele politice din jurul morţii lui Galois sunt descrise în Hoddle (1850); Gisquet (1840 – 1844).

29 *… pe deplin compatibilă cu caracterele lor*: Auffray crede că Galois nu s-ar fi referit la tânărul său prieten Duchatelet (născut pe 12 mai 1812) ca la unul dintre cei doi „bărbaţi" sau „patrioţi" (de pildă în scrisorile sale către „toţi republicanii" sau către N.L. şi V.D.). Dar, în realitate, stilul lui Galois este pe deplin compatibil cu o astfel de atitudine – de a se simţi obligat (după cum susţine Faultrier) să păstreze secretă identitatea adversarilor săi.

30 *… este cunoscut faptul că Dumas a greşit*: Astruc (1994) spune despre el că era „deseori lăudăros".

31 *… aş îndrăzni să propun*: Ideea că adversarul s-ar putea să fi fost Duchatelet fusese deja avansată de Dalmas (1956), ea fiind apoi adoptată de Rothman (1982 a) în analiza lui ulterioară, care a apărut pe Internet. Cu toate acestea, Toţi Rigatelli a formulat un scenariu total diferit în 1996, iar el a fost cel care a dominat discuţiile ulterioare. Importanta constatare a faptului că trebuie identificaţi doi adversari a fost făcută de Auffray (2004). Sugestia mea se bazează pe *întregul* material existent.

32 *… el nu stătuse complet întors într-o parte*: Practicile precise şi istoria duelurilor sunt discutate, de exemplu, în Baldick (1965).

33 *… Riquet à la Houppe*: A apărut prima dată într-o povestire a lui Charles Perrault din 1697, inspirată de nuvela *Inès de Cordoue* a Catherinei Bernard (apărută în 1696).

34 *El scrie în memoriile sale*: Gisquet (1840 – 1844).

35 *… înmormântarea generalului*: Evenimentul este descris în Hugo (1862).

36*… desenat din memorie de Alfred*: Desenul a apărut în *Magasin Pittoresque,* vol. 16, iulie 1848, pp. 227 – 228.

37 *Lie concluziona*: Verdier (2003).

38… cu ocazia punerii plăcii comemorative: Descrisă în ziarul *La Banlieue,* nr. 24, 20 iunie 1909.

39… Tannery a încheiat cu o mişcătoare mea culpa: Tannery (1909).

6. GRUPURILE

Printre descrierile interesante ale dezvoltării şi istoriei teoriei grupurilor se numără Kiernan (1971); Tignol (2001); Novy (1973); Wussing (1984); Chandler şi Magnus (1982). Un scurt rezumat este dat în Kline (1972). Dintre multele tratări (ceva mai avansate) ale grupurilor şi teoriei lui Galois, recomand mai ales următoarele cărţi: Rotman (1990, 1995); Stewart (2004); Tignol (2001); Fraleigh (1989); Gârling (1960); Edwards (1984). Pentru o scurtă, dar strălucită aplicare a grupurilor în ştiinţă, consultaţi Eddington (1956).

1 *… Sefer yetzira*: Kaplan (1990); Katz (1989).

2.. . să examinăm operaţia care permută: Un exemplu similar apare în Verdier (2003).

3 *… puzzle 14 – 15*: Gardner (1959 b); Singh (1997).

4 *Rubik a inventat cubul în 1974*: Rubik, Varga, Keri, Marx şi Vekerdy (1987).

5 *În onoarea inventatorului*: Goudey (2001 – 2003).

6 *… soluţia problemei cubului*: Frey and Singmaster (1982).

7 *Matematicianul David Joyner*: Joyner (2002).

8. *mulţimea tuturor permutărilor posibile*: Grupurile se numesc „comutative” sau „abeliene” (după Abel) dacă, pentru oricare doi membri ai grupului, ordinea în care se combină (prin legea de compoziţie) nu are importanţă. Adică, x o *y* = *y o x* pentru orice membri ai grupului x şi y. Spre exemplu, grupul tuturor numerelor întregi asociat cu operaţia de adunare obişnuită este abelian, căci suma oricăror doi întregi este aceeaşi, indiferent de ordine (de exemplu, 5 + 3 = 3 + 5 = 8). Din tabla de pe pagina 190 putem vedea că grupul permutărilor de trei obiecte nu este abelian (de exemplu, o t2 = Şi, iar t2 o t1 = S_2).

9 *Orice grup este turnat în acelaşi mulaj*: Demonstraţii riguroase ale teoremei lui Cayley se găsesc, spre exemplu, în Birkhoff şi MacLane (1953) şi Patterson şi Rutherford (1965).

10 *Demonstraţia conţine trei componente cruciale*: O expunere simplă a logicii demonstraţiei este prezentată în Rothman (1982 b). Demonstraţii riguroase se pot găsi, spre exemplu, în: Edwards (1984); Rotman (1990); Tignol (2001); Stewart (2004). Versiunea originală a lui Galois este reprodusă în Toţi Rigatelli (1996).

11 *... combinaţia care dă suma celor două soluţii*: În general, determinarea grupului Galois pentru ecuaţii de grad superior nu este uşoară.

12.. *.0 problemă importantă. a găsirii unui partener de căsnicie:* Smith (1997); Cooper (1997). Problema este discutată şi în Cresswell (2003).

13 *Povestea biblică a judecătorului Ghedeon*: Judecătorii 7: 2.

14...*10 teria de recrutare din 1970*: Starr (1997); Fienberg (1971); Rosenbaum (1970).

15 *Un studiu recent realizat de statisticienii*: Diaconis, Holmes şi Montgomery (2004); Peterson (2004); Keller (1986).

16 *„Abstracţia prematură se izbeşte de urechi surde...”*: Kline şi Alder (2000).

17 *Viaţa lui Cayley*: Bell (1937); Crilly (1995); Forsyth (1895); Gray (1995); O’Connor şi Robertson (1996 d).

18 *Se începem cu patru operaţii*: Budden (1972).

19 *Un extrem de complex sistem de rudenie-căsătorie*: Fletcher (1967); Fox (1967); Verdier (2003).

20 *Extinsele analize ale lui Claude Lévi-Strauss*: Lévi-Strauss (1949, 1958).

21 *… gramatici universale*: Această tematică a fost introdusă şi discutată pe larg în lucrările lingvistului Noam Chomsky. Printre lucrările fundamentale citez: Chomsky (1966, 1968, 1975); Chomsky şi Halle (1968). Pentru a căpăta o idee despre opera lui Chomsky în general, vezi Maher şi Groves (1996).

22*. asta nu înseamnă că toate limbile*: Permişi (2004).

23 *… romancierul şi filosoful Umberto Eco*: Vezi, spre exemplu, colecţia de eseuri Eco (2004).

24.. .1 ezuitul Giovanni Girolamo Saccheri: Angelelli (1995); Emeh (1933); Pascal (1914).

25 *… postulatul al cincilea este înlocuit*: Bonola (1955); Trudeau (1987); Gray (1979); Sommerville (1960); O'Connor şi Robertson (1996 a), Coxeter (1998).

26 *János Bolyai (1802 – 1860)*: Szenassy (1992); Mayer (1982); Bier (1992).

27… Nikolailvanovicilobacevski: Daniels (1975); Halsted (1895); Vucinich (1962).

28*… Eugenio Beltrami*: Chandrasekhar (1989); Bryan (1901).

29 *Georg Friedrich Bernhard Riemann*: Interesante cărţi de popularizare au fost scrise de: Derbyshire (2003); Du Sautoy (2003); Sabbagh (2003). Descrieri mai ştiinţifice ale lucrărilor de geometrie ale lui Riemann se găsesc în Portnoy (1982); Zund (1983); Scholz (1992).

30 *Într-o prelegere fundamentală*: Yaglom (1988); Birkhoff şi Bennett (1988); James (2002).

31 *Aceste idei au fost extinse ulterior*: Prezentări deosebite ale unora dintre simetriile rezultate din lucrarea lui Klein găsiţi în seriile *Mumford* şi Wright (2002).

32 *… Leopold Kronecker*: Bell (1937); Edwards (1987); James (2002).

33… Charles Hermite: Bell (1937); Belhoste (1996);

James (2002); Darboux (1906).

34 *Filosofia pe care se baza investigaţia lui Klein*: Klein (1884).

7. REGULILE DE SIMETRIE

Există câteva cărţi de popularizare care discută rolul simetriei în legile naturii. Cea mai extinsă discuţie se găseşte în excelentul volum al lui Zee (1999). Alte cărţi interesante: Icke (1995); Lederman şi Hill (2004). Expuneri mai scurte, dar foarte clare, ale unora dintre ideile principale au fost făcute de: Weinberg (1992); Greene (1999, 2004); Penrose (2004); Kaku (1994, 2004); Gell-Mann (1994); Barrow (2003); Webb (2004).

1 *„Natura şi legile naturii…”*. Epitaf destinat lui Sir Isaac Newton.

2 *În capodopera sa ştiinţifică*: Vezi în Chandrasekhar (1995); Motte (1995); Gleick (2003).

3.. . viteza luminii este întotdeauna aceeaşi: Excelente prezentări de popularizare a relativităţii restrânse şi generale pot fi găsite, spre exemplu, în Kaku (2004); Greene (2004); Penrose (2004); Galison (2004); Davies (1977); Bodanis (2000); Wheeler (1990); Hawking şi Penrose (1996); Deutsch (1997). Pentru un tratat recent, vezi Schwarz şi Schwarz (2004). De la părintele relativităţii însuşi: Einstein (1953, 2001, 2004).

4*… au confirmat ca particulele călătoare de acest gen trăiesc mai mult*: Rossi şi Hall (1941); Bailey şi alţii (1977).

5 *Fizicieniiloseph Carl Hafele siRichard Keating*: Hafele şi Keating (1972 a, b).

6.. *. atitudinea lui Einstein faţă de matematica pură*: Printre prezentările utile pentru a căpăta o mai bună înţelegere a lui Einstein-omul se numără: Overbye (2000); País (1982); Miller (2001); Frank (1949); Folosing (1997).

7.. *. există numai şapte modele distincte*: Budden (1972); Farmer (1996); Barrow (1995); Stevens (1996).

8 Forţa de gravitaţie şi forţa de acceleraţie: În plus faţă de cărţile de popularizare a relativităţii generale menţionate mai sus, este întotdeauna edificator să examinăm articolele originale ale lui Einstein, de pildă în

Stachel (1989) sau în monumentala colecţie a articolelor lui Albert Einstein, publicată de Princeton University Press. Un tratat de acum clasic asupra relativităţii generale a fost scris de Misner, Thorne şi Wheeler (1973).

9 „Şedeam în oficiul de brevete…”: Dintr-o conferinţă susţinută la Kyōto în 1922. Notiţele au fost luate de Yon Ishiwara şi au fost traduse în august 1932, în *Physics Today,* de Y.A. Ono. Citat în Calaprice (2000).

10 Newton era perfect conştient: Vezi Chandrasekhar (1995).

11 … a devenit ulterior cunoscut drept paradoxul lui Ehrenfest: O analiză ştiinţifică poate fi găsită în Hill (1946).

12 Pe un ton neajutorat ce nu-i era caracteristic: Citat în Kaku (2004).

13 Într-o conferinţă ţinută la Academia Prusacă de Ştiinţe: Conferinţa era intitulată „Geometrie şi experienţă”. Citat în Calaprice (2000).

14 … schimbarea ce rezultă în funcţia de undă prin modificarea coordonatei temporale: Vezi şi Weinberg (1992); Feynman, Leighton şi Sands (1965). Pentru o expunere generală a mecanicii cuantice, o excelentă prezentare de popularizare a fost făcută de Lindley (1996).

15 Emmy Noether s-a născut în Germania, la Erlangen: James (2002); Osen (1974); Kimberling (1972); Weyl (1935).

16 Noether a demonstrat teorema: Pentru o demonstraţie relativ simplă vezi Baez (2002) şi „T corema lui Noether”, în Wikipedia, pe Internet.

17 Ele sunt compuse din blocuri constructive: Există multe cărţi de popularizare despre fizica particulelor şi teoriile forţelor fundamentale. Câteva dintre cele mai bune sunt: Gell-Mann (1994); Barrow (1991); Davies (1984); Glashow (1988); Guth (1997); Weinberg (1992); Lederman (1993); Ferris (1997).

18 Fiziciană şi autoarea Cindy Schwarz a compilat o întreagă colecţie: Schwarz (2002).

19 Ideile lui Lie au devenit atât de importante: Pentru o

introducere relativ accesibilă în teoria grupurilor Lie, vezi Lipkin (2002); Hall (2003).

20 Sophus Lie... a ajuns la matematică: Stubhaug (2002); O'Connor şi Robertson (2002).

21 ... motivele repetitive de „tapet de hârtie" sunt limitate la 17: De exemplu, Budden (1972). Este interesant că 13 din cele 17 clase pot fi găsite în palatul Alhambra din Granada, Spania; Grünbaum, Grünbaum şi Shephard (1986).

22 Biblia ne spune că... israeliţii: Exodul 13: 21.

23 Dar într-un univers care şi-a început expansiunea pornind de la un Big Bang: Lista unor foarte bune cărţi de popularizare recent apărute în domeniul cosmologiei conţine printre altele: Rees (1997); Guth (1997); Silk (2000); Kirshner (2002); Goldsmith (2000); Chown (2002); Tyson şi Goldsmith (2004); şi desigur, trebuie să-l menţionez pe Livio (2000).

24 ... relativitatea generală şi mecanica cuantică par realmente: Excelente prezentări de popularizare ale teoriei stringurilor şi a altor căi potenţiale de a combina gravitaţia cu mecanica cuantică sunt: Greene (1999, 2004); Smolin (2002); Kaku (1994); Davies (1995, 2001); Gribbin (1999). Pentru scurte treceri în revistă, vezi Witten (2004 a, b).

25 Afirmaţia fizicienilor John Schwarz... şi Joël Scherk: Afirmaţii oarecum similare sau legate de acestea au fost făcute independent de alţi fizicieni; de exemplu, de suedezul Lars Brink şi japonezul Tamiaki Yoneya.

26 Epocalul progres a fost făcut în 1984: Pentru o prezentare populară, vezi Green (1986).

27 ... cum îşi propune teoria stringurilor să rezolve: Pentru un manual recent despre teoria stringurilor, vezi Zweibach (2004).

28 De fapt, exista chiar şi o teoremă: Demonstrată în 1967 de fizicienii Sidney Coleman şi Jeffrey Mandula; Coleman şi Mandula (1967).

29 Supersimetria este o simetrie subtilă: Kane (2000), Greene (1999).

30 *… cunoscute sub denumirea de* numere Grassmann: Algebra introdusă de Grassmann este cunoscută drept *algebră exterioară.*

8. CINE-I CEL MAI SIMETRIC DINTRE TOŢI?

1 *Psihologia evoluţionistă este o ştiinţă*: Excelente cărţi despre psihologia evoluţionistă sunt, printre altele: Dawkins (1986, 1989); Barkow, Cosmides şi Tooby (1992); Pinker (1994); Buss (1999). Ideea modularităţii minţii este discutată, de exemplu, în Fodor (1983). Alte treceri în revistă foarte bune sunt: Cosmides şi Tooby (1987); Tooby şi Cosmides (1990). O foarte succintă descriere generală este prezentată în Evans şi Zarate (1999).

2 *Care era problema adaptivă precisă*: Braitenberg (1984); Dennett (1988).

3 *. circuitele din creier care transmit sentimentul de teamă*: LeDoux (1996); Kalin (1993).

4 *Esenţial pentru emoţia imediată*: Davis (1992); Fanselow (1994).

5 *… pete mari care în repaus sunt ascunse*: Lyytinen, Brakefield şi Mappes (2003); Blest (1957).

6 *În aceste experimente, efectuate de cercetătorii suedezi*: Forsman şi Meritaita (1999, 2003). Treceri în revistă mai generale despre detecţia asimetriei pot fi găsite în Palmer (1994); Moller şi Swaddle (1997).

7 *Omul de stat şi filosoful britanic Edmund Burke*: Burke (1757).

8 *… cartea umoristului George Burns*: Burns (1984).

9.. . În evoluţie contează şi selecţia sexuală: Printre cărţile interesante despre selecţia sexuală se numără cele scrise de: Ridley (2003); Buss (2003); Mi ller (2000).

10.. . lucrare a biologilor William Hamilton şi Marlene Zuk: Hamilton şi Zuk (1982).

11 *Alte experimente, cu rândunele de casă*: Moller (1992, 1994).

12*… şi cu cintezoi-zebră*: Swaddle şi Cuthill (1994).

13 *Biologul israelian Amotz Zahavi*: Zahavi (1975, 1991); Zahavi şi Zahavi (1997).

14.. . *biologul suedez Magnus Enquist şi inginerul britanic Anthony Arak*: Enquist şi Arak (1994).

15 *Rezultate similare a obţinut într-un experiment separat, cu o reţea neuronală*: Johnstone (1994).

16 *… după expresia psihologului evoluţionist David Buss*: Buss (1999).

17 *… până şi zona din creier*: Aharon şi alţii (2001).

18 *Studiile mai recente ale psihologului Judith Langlois de la Universitatea din Texas*: Langlois şi Roggman (1990).

19 *Psihologul Michael Cunningham a găsit*: Cunningham şi alţii (1995).

20 *Studiile care au depăşit frontierele geografice şi etnice*: Discutate, spre exemplu, în Jackson (1992) şi Jones (1996).

21 *… ce găsesc, în fond, atrăgător bărbaţii şi femeile*: O excelentă trecere în revistă este făcută în Grammer şi alţii (2003). Vezi şi Gangestad, Thornhill and Yeo (1994); Grammer şi Thornhill (1994); Thornhill and Gangestad (1996); Thornhill şi Grammer (1999).

22 *… Grammer şi Anja Rikowski*: Rikowski şi Grammer (1999). Vezi şi Schaal şi Porter (1991); Thornhill şi alţii (2003).

23 *… o relaţie între simetrie şi orgasm*: Thornhill, Gangestad şi Comer (1995).

24 *O cercetare independentă efectuată de psihologii*: Shackelford şi Larsen (1997).

25 *Ea a generat pe calculator combinaţii*: Langlois şi Roggman (1990); Langlois, Roggman şi Musselman (1994); Langlois şi alţii (2000).

26 *Savantul cognitiv David Perrett*: Perrett şi alţii (2002). Vezi şi Perrett, May şi Yoshikawa (1994).

27*… bărbaţii preferă femei cu forma clasică*: Singh (1993, 1995).

28*Într-un interviu din 1985*: Gleason (1990).

29 *… numit* modelul lui Elliott: Descris, spre exemplu, în Dyson (1966).

30 *În acelaşi mod în care temperaturile de îngheţare*: Pentru o prezentare concisă, de popularizare a teoriei

stringurilor, vezi Witten (2004 b).

31 *. ideile teoretice ale ruperii simetriei sunt pe calea cea bună*: În particular, utilizând cea mai economică implementare a ruperii simetriei, teoria prezice existenţa unei noi particule, nevăzute până acum, numită particula lui Higgs (după fizicianul scoţian Peter Higgs). Se aşteaptă ca această particulă să fie produsă cu Large Hadron Collider.

32 *„Noi venim să descriem natura…”*: Sir Michael Atiyah discută subiecte strâns legate de acesta şi în Atiyah (1993).

33.. *. autorul îşi încheie astfel discuţia*: Feynman, Leighton şi Sands (1963).

34.. *. le putem reprezenta convenabil pe cadranul unui ceas*: Grupurile în muzică sunt frumos discutate de Budden (1972). Vezi şi Winchel (1967); Lewin (1993). Cu privire la răspunsul fiziologic uman la sunet, vezi Maor (1994).

35 *… mai ales Arnold Schönberg*: Schönberg (1969).

36*… muzica atonală*: Vezi, de exemplu, Rahn (1980).

37 *Una dintre acele familii fusese definită*: Definiţia originală i se datora lui Cauchy, dar Galois este cel dintâi care a introdus noţiunea de „grup simplu”.

38 *Povestea grupurilor finite simple sporadice*: Excelente prezentări de popularizare au fost făcute de Devlin (1999); Odifreddi (2004). O descriere ceva mai ştiinţifică găsiţi în Solomon (1995). Pentru cei cu înclinaţii mai mari pentru matematică: Aschbacher (1994); Gorenstein (1982, 1986).

39*Daniel Gorenstein* (1923 – 1992): Aschbacher (1992).

40 *Aşa cum scria Gorenstein în 1989*: În discursul pe care l-a rostit la primirea Premiului Steele acordat de American Mathematical Society.

41 *Ultima dintre acestea a fost, în sfârşit, soluţionată*: Cele două volume *The Classification of Quasithin Groups* au apărut în numerele 111 şi 112 în seria *Mathematical Surveys şi Monographs* a Societăţii Matematice Americane.

9. RECVIEM PENTRU UN GENIU ROMANTIC

1 Matematicianul şi autorul Clifford Pickover: Pickover (2001).

2 Psihologul Mihály Csikszentmihályi de la Universitatea din Chicago: Csikszentmihályi (1996).

3 Poetul englez Owen Meredith: În *Ultimele cuvinte ale unui poet sensibil de mâna a doua.*

4 … multe studii arată că peste un anumit nivel al coeficientului de inteligenţă: Rezumate ale lor de exemplu în Gardner (1993); Simonton (1999). Vezi şi Dartnall (2002); Ambrose, Cohen şi Tannenbaum (2003); Rothenberg şi Hausman (1976). O cuprinzătoare trecere în revistă a studiilor de creativitate a fost făcută de Sternberg (1998).

5 Aşa cum a observat Howard Gardner: Gardner (1993). O compilaţie interesantă găsiţi în Brockman (1993).

6… n-am găsit numele lui Galois: O scurtă examinare a creativităţii lui Poincaré şi Einstein este prezentată în Miller (1996). Un mozaic de o sută de minţi creative din literatură şi religie este prezentat în Bloom (2002). O interesantă examinare a creativităţii membrilor echipei Statelor Unite la Olimpiada de Matematică este prezentată în Olson (2004). Vezi şi Csikszentmihályi (1996); Gardner (1993).

7 Psihologii John Dacey şi Kathleen Lennon: Dacey şi Lennon (1998).

8 … zece perechi de caracteristici aparent antitetice: Csikszentmihályi (1996).

9 … psihologul Ellen Winner consideră: Winner (1996).

10 Filosoful francez Jean-Paul Sartre: Sartre (1964).

11 În 1895, psihiatrul W.L. Babcock: Babcock (1895).

12 psihologul Arnold Ludwig a analizat vieţile: Ludwig (1995); Simonton (1999). Un interesant studiu anterior al acestei probleme este acela al lui Lombroso (1895).

13 Rezultatele au arătat că oamenii creativi: MacKinnon (1975).

14 Eseistul englez Sir Max Beerbohm: În „No. 2. The

Pines”.

15 Timp de peste două decenii: Pe website-ul său, Steven Levy istoriseşte cum a găsit el creierul lui Einstein. Relatarea este reprodusă şi în Abraham (2002) şi Paterniţi (2000).

16 … raportul dintre neuroni şi nevroglii: Diamond şi alţii (1985).

17 … această interpretare a fost pusă ulterior sub semnul întrebării: Hines (1998).

18 Anderson şi Harvey au arătat: Anderson şi Harvey (1996).

19 … neuropsihologul Sandra Witelson… de la Universitatea McMaster: Witelson, Kigar şi Harvey (1999).

20 În raportul de autopsie, despre creierul lui Galois se poate citi: Dupuy (1896).

21 Matematicianul şi autorul Ian Stewart a exprimat: Stewart (2004).

22 … un atractiv site, intitulat: http://www.neuroticpoets.com/ shelley.

23 Faimosul poet indian Rabindranath Tagore: Citat, de exemplu, pe: http://www.en. wikiquote.org/wiki/Death.

24 decât cele din poemul lui Emily Dickinson: Poate fi găsit, de exemplu, pe: http://www.everypoet.com/archive/index.htm/.

Bibliografie

Abel, Niels Henrik. 1902. *Mémorial publié à l’occasion du centenaire de să naissance* (Christiania: Jacob Dybwal).

Abraham, C. 2002. *Possessing Genius: The Bizarre Odyssey of Einstein’s Brain* (New York: St. Martin’s Press).

Aczel, A.D. 1996. *Fermat’s Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem* (New York: Four Walls Eight Windows).

Aharon, I., Etcoff, N., Ariels, D., Chabris, C. E, O’Connor, E., and Breiter, H.C. 2001. „Beautiful Faces Have Variable Reward Value: FMRI and Behavioral Evidence”. *Neuron,* 32 (3), 537.

al-Nadim, I. 1871 – 72. *Kitab al-Fihrist.* J. Roediger

and A. Mueller, eds. (Leipzig: FCW Vogel).

Altschuler, E.L. 1994. *Bachanalia* (Boston: Little, Brown and Company).

Ambrose, D., Cohen, L.M., and Tannenbaum, A.J., eds. 2003. *Creative Intelligence: Toward Theorie Integration* (Cresskill, NJ: Hampton Press).

Amir-Moéz, A.R. 1994. „Khayyam, Al-Biruni, Gauss, Archimedes, and Quartic Equations". *Texas Journal of Science,* 46, no. 3, 241.

Anderson, B., and Harvey, T. 1996. „Alterations in Cortical Thickness and Neuronal Density in the Frontal Cortex of Albert Einstein". *Neuroscience Letters,* 210, 161.

Angelelli, I. 1995. „Saccheri's Postulate". *Vivarium,* 33 (1), 98.

Aschbacher, M. 1992. „Daniel Gorenstein (1923 – 1992)". *Notices of the AMS,* 39 (10), 1190.

Aschbacher, M. 1994. *Sporadic Groups* (Cambridge: Cambridge University Press).

Astruc, A. 1994. *Evariste Galois* (Paris: Flammarion).

Atiyah, M. 1993. „Mathematics: Queen and Servant of the Sciences". *Proceedings of the American Philosophical Society,* 137, no. 4, 527.

Auffray, J.-P. 2004. *Evariste 1811 – 1832, le roman d'une vie* (Lyon: Aléas).

Ayoub, R.G. 1980. „Paolo Ruffini's Contributions to the Quintic". *Archive for History of Exact Sciences,* 23, 253.

Babcock, W.L. 1895. „On the Morbid Heredity and Predisposition to Insanity of the Man of *Genius". Journal of Nervous and Mental Disease,* 20, 749.

Baez, J. 2002. http://www.math.ucr.edu/home/baez/noether.html/.

Bailey, J., et al. 1977. „Measurements of Relativistic Time Dilation for Positive and Negative Muons in a Circular Orbit". *Nature,* 268, 301.

Baidick, R. 1965. *The Duel* (London: Chapman & Hall).

Ball, W.W.R., and Coxeter, H.S.M. 1974.

Mathematical Recreations and Essays, 12th ed. (Toronto: University of Toronto Press).

Bărbier, A. 1944. Un Météore: Evariste Galois, Mathématicien 1811 – 1832 (manuscript in the Bourg-la-Reine collection).

Barkow, J., Cosmides, L., and Tooby, J. 1992. *The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and the Generation of Culture* (New York: Oxford University Press).

BarrowJ. D. 1991. *Theories of Everything: The Quest for Ultimate Explanation* (Oxford: Clarendon Press).

Barrow, J.D. 1995. *The Artful Universe* (Boston: Back Bay Books).

Barrow, J.D. 2003. *The Constants of Nature: From Alpha to Omega – The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe* (New York: Pantheon).

Barry, A.M.S. 1997. *Visual Intelligence, Perception, Image, and Manipulation in Visual Communication* (Albany: State University of New York Press).

Bartusiak, M. 2000. *Einstein's Unfinished Symphony* (Washington, D.C.: Joseph Henry Press).

Battersby, S. 2003. „Will Abel Prize for Maths Rival the Nobels?" *New Scientist,* 7 June, 12.

Belhoste, B. 1996. „Autour d'un Mémoire Inédit: La Contribution d'Hermite au Développement de la Théorie des Fonctions Elliptiques". *Revue d'Histoire des Mathématiques,* 2 (1), 1.

Bell, C. 1997. „The Aesthetic Hypothesis". În *Aesthetics,* S.L. Feagin and P. Maynard, eds. (Oxford: Oxford University Press), 15.

Bell, E.T. 1937. *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster); reprinted în 1986.

Bell, E.T. 1951. *Mathematics, Queen and Servant of Science* (New York: McGraw-Hill).

Bérard, A.S.L. 1834. *Souvenirs historiques sur la révolution de 1830* (Paris: Perrotin).

Bergeron, H.W. 1973. *Palindromes and Anagrams* (New York: Dover Publications).

Berloquin, P. 1974. *Un Souvenir d'Enfance d'Evariste Galois* (Paris: Balland).

Berriman, A.E. 1956. „The Babylonian Quadratic Equation". *The Mathematical Gazette,* XL, no. 333, 185.

Bertrand, J. 1899. „Sur la vie d'Evariste Galois par Paul *Dupuy". Journal des savants,* July, 289.

Bier, M. 1992. „A Transylvanian Lineage". *The Mathematical Intelligencer,* 14 (2), 52.

Birkhoff, G., and Bennett, M.K. 1988. „Felix Klein and His Erlanger Programm". În *History and Philosophy of Modern Mathematics (Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI),* W. Aspray and P. Kitcher, eds. (Minneapolis: University of Minnesota Press), 145.

Birkhoff, G., and MacLane, S. 1953. *A Survey of Modern Algebra* (Basing-stoke Hampshire: Collier Macmillan).

Birkhoff, G.D. 1933. *Aesthetic Measure* (Cambridge, MA: Harvard University Press).

Bjerknes, C.A. 1880. *Niels Henrik Abel: En skildring af hans Liv og vitens-kapelige Virksomhed* (Stockholm); translated into French în 1885 as *Niels Henrik Abel: Tableau, de să vie et de son action scientifique* (Paris: Gauthier-Villars).

Blanc, L. 1841 – 1844. *L'Histoire de dix ans (1830 – 840)* (Paris: Paquerre).

Blest, A.D. 1957. „The function of eyespot patterns in the Lepidoptera". *Behaviour,* 11, 209.

Bloom, H. 2002. *Genius* (New York: Warner Books).

Boardman, A.D., O'Connor, D.E., and Young, P.A. 1973. *Symmetry and Its Application in Science* (New York: John Wiley & Sons).

Bodanis, D. 2000. E = mc^2 (New York: Walker).

Bonola, R. 1955. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development* (New York: Dover).

Bortolotti, E. 1933. *I Cartelli Di Matemàtica Disfida* (Imola: Cooperation Tip. Edit. Paolo Găleaţi).

Bortolotti, E. 1947. *La Storia Della Matemàtica Nella*

Università Di Bologna (Bologna: Nicola Zanichelli Editoare).

Bourgne, R., and Azra, J.P., eds. 1962. *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois* (Paris: Gauthier-Villars).

Bowers, B. 2001. *Sir Charles Wheatstone FRS 1802 – 1875* (Edison, NJ: IEE Publishing).

Boyer, C.B. 1991. *A History of Mathematics,* revised by U.C. Merzbach (New York: John Wiley & Sons).

Braitenberg, V. 1984. *Vehicles* (Cambridge, MA: MIT Press).

Brindley, G.S. 1970. *Physiology of the Retina and Visual Pathway* (Baltimore: Williams & Wilkins Company).

Brockman, J., ed. 1993. *Creativity* (New York: Touchstone).

Brown, T.M., Ferguson, H.C., Smith, E., Kimble, R.A., Sweigert, A.V., Ren-zini, A., Rich, R.M., and Vandenberg, D.A. 2003. „Evidence of a Significant Intermediate-Age Population in the M31 Halo from Main-Sequence Photometry". *The Astrophysical Journal,* 592, L17.

Bryan, G.H. 1901. „Eugenio Beltrami". *Proceedings of the London Mathematical Society,* 32, 436.

Budden, F.J. 1972. *The Fascination of Groups* (Cambridge: Cambridge University Press).

Buffart, H., and Leeuwenberg, E.L.J. 1981. „Structural Information Theory". În H.G. Geissler, E.L.J. Leeuwenberg, S. Link, and V. Sarris, eds., *Modern Issues în Perception* (Berlin: Erlbaum).

Burând, R. 1943. *La vie quotidienne en France en 1830* (Paris: Hachette).

Burke, E. 1757. *A Philosophical Enquiry into the Origin of Our Ideas of the Sublime and Beautiful* (new edition published in 1998; Oxford: Oxford University Press).

Burns, G. 1984. *How to Live to Be 100-or More* (London: Robson Books).

Buss, D.M. 1999. *Evolutionary Psychology: The New Science of the Mind* (Needham Heights: Allyn & Bacon).

Buss, D.M. 2003. *The Evolution of Desire* (New York: Basic Books).

Bychan, B. 2004. „The Evariste Galois Archive".http://www.galoisgroup.net/.

Calaprice, A., collector and ed. 2000. *The Expanded Quotable Einstein* (Princeton: Princeton University Press).

Calinger, R. 1999. *A Contextual History of Mathematics* (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall).

Candido, G. 1941. „La risoluzione della equazione di 4 – grado". *Periadico di Matematiche,* ser. IV, vol. XXI, no. 1, 21.

Cardano, G. 1993. *Ars Magna or the Rules of Algebra,* T.R. Witmer, trans. and ed. (Mineola, NY: Dover Publications); original edition 1545.

Carruccio, E. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography, C.C.* Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Caspar, F.H., and Hammer, E, eds. 1937. *Johannes Kepler: Gesammelte Werke* (Münich: C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung).

Chandler, B., and Magnus, W. 1982. *The History of Combinatorial Group Theory: A Case Study in the History of Ideas* (New York: Springer-Verlag).

Chandrasekhar, T.R. 1989. „Non-Euclidean Geometry from Early Times to Bertram". *Indian Journal of History of Science,* 24 (4), 249.

Chandrasekhar, S. 1995. *Newton's Principia for the Common Reader* (Oxford: Clarendon Press).

Chenu, A. 1850. *Les Conspirateurs* (Paris: Gamier Frères).

Chevalier, A. 1832. „Nécrologie Evariste Galois". *Revue encyclopédique,* 55, 744.

Chomsky, N. 1966. *Topics in the Theory of Generative Grammar (*The Hague: Mouton).

Chomsky, N. 1968. *Language and Mind* (New York: Harcourt Brace Jovanovich).

Chomsky, N. 1975. *The Logical Structure of Lingvistic Theory* (New York: Plenum).

Chomsky, N., and Halle, M. 1968. *The Sound Pattern of English* (New York: Harper & Row).

Chown, M. 2002. *The Universe Next Door* (Oxford: Oxford University Press).

Coleman, S., and Manchila, J. 1967. „All Possible Symmetries of the S-matrix". *Physical Review,* 159, 1251.

Cooper, L. 1997. „Maths, love and men's best friend". *The Independent,* April 5.

Corballis, M.C. 1988. „Recognition of Disonented Shapes". *Psychological Review,* 95, 115.

Corballis, M.C., and Beale, I.L. 1976. *The Psychology of Left and Right* (Hillsdale, NJ: Erlbaum).

Corballis, M.C., and Roldan, C.E. 1974. „On the Perception of Symmetrical and Repeated Patterns". *Perception and Psychophysics,* 16 (1), 136 – 142.

Cosmides, L., and Tooby, J. 1987. „From Evolution to Behavior: Evolutionary Psychology as the Missing Link". În *The Latest on the Best: Essays on Evolution and Optimality*, J. Dupré, ed. (Cambridge, MA: MIT Press).

Coxeter, H.S. 1998. *Non-Euclidean Geometry* (Washington, DC: Mathematical Association of America).

Cresswell, C. 2003. *Mathematics and Sex* (Crows Nest NSW, Australia: Allen & Unwin).

Crilly, T. 1995. „A Victorian Mathematician: Arthur Cayley (1821 – 1895)". *Mathematical Gazette,* 79, 259.

Crossley, J.N. 1987. *The Emergence of Number* (Singapore: World Scientific).

Csikszentmihályi, M. 1996. *Creativity* (New York: HarperCollins).

Cunningham, M.R., Roberts, A.R., Wu, C.-H., Barbeis, A.P., and Druen, P.B. 1995. „Their Ideas of Beauty Are, on the Whole, the Same as Ours: Consistency and Variability in the Cross-Cultural Perception of Female Attractiveness". *Journal of Personality and Social Psychology,* 68, 261.

Dacey, J.S., and Lennon, K.H. 1998. *Understanding Creativity* (San Francisco: Jossey-Bass Publishers).

Dahan-Dalmédico, A. 1991. „Sophie Germain".

Scientific American, 265, 117.

Dalmas, A. 1956. *Évariste Galois, Révolutionnaire et Géomètre* (Paris: Fasquelle); reprinted în 1982 by Le Nouveau Commerce (Paris).

Daniels, N. 1975. „Lobachevsky: Some Anticipations of Later Views on the Relation between Geometry and Physics". *Isis*, 66, 75.

Darboux, G. 1906. „Charles Hermite". *La Revue du Mois,* l, 37.

Dannali, T., ed. 2002. *Creativity, Cognition, and Knowledge* (Westport, CT: Praeger).

Davidson, G. 1938. „The Most Tragic Story in the Annals of Mathematics". *Scripta, Mathematica,* 6, 95.

Davies, P. 1977. *Space and Time in the Modern Universe* (Cambridge: Cambridge University Press).

Davies, P. 1995. *About Time* (New York: Simon & Schuster).

Davies, P. 2001. *How to Build a Time Machine* (New York: Allen Lane).

Davies, P.C.W. 1984. *Superforce* (New York: Simon & Schuster).

Davis, M. 1992. „The role of the amygdala în fear-potenţiated startle: Implications for animal models of anxiety". *Trends în Pharmacological Science*, 13, 35.

Dawkins, R. 1986. *The Blind Watchmaker* (New York: W.W. Norton).

Dawkins, R. 1989. *The Selfish Gene* (Oxford: Oxford University Press). De Hureaux, A.D. 1993. *Delacroix* (Paris: Editions Hazau). De la Hodde, L. 1850. *Histoire des sociétés secrètes et du parţi républicain de1830 à 1848* (Paris: Julien et Lanier).

De Nerval, G. 1841. „Mémoire d'un Parisien". *L'Artiste,* April 11.

De Nerval, G. 1855. „Mes Prisons". În *la bohème galante* (Paris: Michel Lévy).

Dennett, D.C. 1988. În *Sourcebook on the Foundations of Artificial Intelligence,* Y. Wilks and D. Partridge, eds. (Albuquerque: New Mexico University

Press).

De Pesloüan, C.L. 1906. *N.H. Abel, să vie et son oeuvre* (Paris: Gauthier-Villars).

Derbyshire, J. 2003. *Prime Obsession* (Washington, DC: Joseph Henry Press).

Deutsch, D. 1997. *The Fabric of Reality* (New York: Allen Lane).

Devlin, K. 1999. *Mathematics, the New Golden Age* (New York: Columbia University Press).

Devlin, K. 2002. *The Millennium Problems* (New York: Basic Books).

Diaconis, P., Holmes, S., and Montgomery, R. 2004. „Dynamical Bias in the Coin Toss". http://www-stat.stanford.edu/-susan/papers/ headswithJ.pdf/.

Diamond, M.C., Scheibel, A.B., Murphy, G.M. Jr., and Harvey, T. 1985. „On the Brain of a Scientist: Albert Einstein". *Experimental Neurology,* 88, 198.

Di Pasquale, L. 1957 a. „La equazioni di terzo grații noi Quesiti et inveņtioni diverse di Niccolò Tartaglia". *Periodico di Matematiche,* ser. IV, vol. XXXV, no. 2, 79.

Di Pasquale, L. 1957 b. „I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari ei controcartelli di Niccolò Tartaglia". *Periodico di Matematiche,* ser. IV, vol. XXXV, no. 5, 253.

Di Pasquale, L. 1958. „I cartelli di matematica disfida di Ludovico Ferrari ei controcartelli di Niccolò Tartaglia (continuazione e fine)". *Periodico di Matematiche,* ser. IV, vol. XXXVI, no. 3, 175.

Donnay, Maurice. 1939. *Le Lycée Louis-le-Grand* (Paris: Nouvelle Revue Française).

Dörrie, H. 196*5.100 Great Problems of Elementary Mathematics (*New York: Dover Publications).

Dumas, A. 1862 – 1865. *Mes mémoires* (Paris: Caiman-Levy).

Dunham, W. 1991. *Journey Through Genius* (New York: Penguin Books); first published in 1990 by John Wiley & Sons (New York).

Durmington, G.W. 1955. *Gauss, Titan of Science*

(New York: Hafner Publishing); reprinted 2004 by The Mathematical Association of America, with additional material by J. Gray and F.-E. Dohse (Washington, DC).

Dupuy, P. 1896. „La Vie d'Évariste Galois". *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*; 3rd ser., 13, 197. Reprinted as a book în 1992 by Éditions Jacques Gabay.

Du Sautoy, M. 2003. *The Music of the Primes* (New York: Harper Collins).

Dyson, F.J. 1966. *Symmetry Groups în Nuclear and Particle Physics* (New York: W.A. Benjamin).

Eco, U. 2004, *On Literature,* trans. M. McLaughlin (Orlando, FI: Harcourt).

Eddington, A.S. 1956. „The Theory of Groups". În *The World of Mathematics,* J.R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster), 1558.

Edwards, H.M. 1984. *Galois Theory* (New York: Springer).

Edwards, H.M. 1987. „An Apreciation of Kronecker". *The Mathematical Intelligencer,* 9, 28.

Edwards, H.M. 1996. *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic N umber Theory* (Berlin: Springer-Verlag).

Einstein, A. 1953. *The Meaning of Relativity* (Princeton: Princeton University Press).

Einstein, A. 2001. *Relativity: The Special and the General Theory (*New York: Routledge).

Einstein, A. 2004. *Einstein's 1912 Manuscript on the Special Theory of Relativity* (New York: George Braziller).

Eisemnan, R., and Rappaport, J. 1967. „Complexity Preference and Semantic Differenţial Ratings of Complexity-Simplicity and Symmetry-Asymmetry". *Psychonomic Science,* 7 (4), 147 – 148.

Emeh, A.F. 1933. *The „Legia Demonstrativa" of Girolamo Saccheri* (Cambridge, MA: Harvard).

Emerson, R.W. 1847. *Poems.* În *Ralph Waldo Emerson: Collected Poems and Translations,* P. Kaye and H. Bloom, eds. (New York: Library of America, 1994).

Enquist, M., and Arak, A. 1994. „Symmetry, Beauty and Evolution”. *Nature,* 372, 169.

Evans, D., and Zarate, O. 1999. *Introducing Evolutionary Psychology* (Cambridge, England: Icon Books).

Evans, J. 1975. *Pattern* (New York: Hacker Art Books).

Fabricand, B.P. 1989. „Symmetry în Free Markets”. *Computers & Mathematics with Applications,* 17, nos. 4 – 6, 653.

Fanselow, M.S. 1994. „Neural Organization of the Defensive Behavior Sistem Responsible for Fear”. *Psychonomic Bulletin and Review,* 1, 429.

Farmer, D.W. 1996. *Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics* (Providence, RI: American Mathematical Society).

Fayen, G. 1977. „Ambiguities în Symmetry-Seeking: Borges and Others”. În *Patterns of Symmetry,* M. Sénéchal and George Fleck, eds. (Amherst: University of Massachusetts Press), 104.

Fehr, H. 1902. *Intermédiaire des mathématiciens,* 9, 74.

Ferris, T. 1997. *The Whole Shebang* (New York: Simon & Schuster).

Feynman, R.P., Leighton, R.B., and Sands, M. 1963. *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I.

Feynman, R.P., Leighton, R.B., and Sands, M. 1965. *The Feynman Lectures on Physics,* vol. III (Reading, MA: Addison-Wesley).

Fienberg, S.E. 1971. „Randomization and Social Affairs: The 1970 Draft Lottery”. *Science*, 171, 255.

Fierz, M. 1983. *Girolamo Cardano 1501 – 1576* (Boston: Birkhauser).

Fine, B., and Rosenberger, G. 1997. *The Fundamental Theorem of Algebra* (Berlin: Springer-Verlag).

Fletcher, D.J. 1967. „Carry On Kariera”. *Mathematics Teaching,* 43, 35.

Fodor, J. 1983. *The Modularity of Mind: An Essay on Faculty Psychology* (Cambridge, MA: MIT Press).

Folosing, A. 1997. *Albert Einstein* (New York: Viking).

Forsman, A., and Meritaita, S. 1999. „Fearful Symmetry: Pattern Size and Asymmetry Affects Aposematic Signal Efficacy". *Evolutionary Ecology*, 13, 131.

Forsman, A., and Meritaita, S. 2003. „Fearful Symmetry? Intra-Individual Comparisons of Asymmetry în Cryptic vs. Signaling Colour Patterns în Butterflies". *Evolutionary Ecology,* 17, 491.

Forsyth, A.R. 1895. „Arthur Cayley". *Proceedings of the Royal Society of London,* 58, 1.

Fox, J. 1975. „The Use of Structural Diagnostics în Recognition. *„Journal of Experimental Psychology,* 104 (1), 57 – 67.

Fox, R. 1967. *Kinship and Marriage: An Anthropological Perspective* (Harmondsworth, England: Penguin Books).

Fraleigh, J.B. 1989. *A Fost Course în Abstract Algebra* (Reading, MA: Addison-Wesley).

Franci, R., and Toţi Rigatelli, L. 1985. „Towards a History of Algebra from Leonardo of Pisa to Luca *Pucioli". Janus,* 72 (1 – 3), 17.

Frank, P. 1949. *Einstein: His Life and His Thoughts* (New York: Alfred A. Knopf).

Frey, A.H. Jr., and Singmaster, D. 1982. *Handbook of Cubik Math (*Hillside, NY: Enslow Publishers).

Freyd, J., and Tversky, B. 1984. „Force of Symmetry în Form Perception". *American Journal of Psychology,* 97 (1), 109 – 126.

Gales, F. 2004. http://perso. wanadoo.fr/frederic. gales/La vie degalois.htm/.

Galison, P. 2004. *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps* (New York: W.W. Norton).

Gamow, G. 1959. „The Exclusion Principle". *Scientific American,* 201, no. 1, 74.

Gandz, S. 1937. „The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra". *Osiris,* vol. III, 405.

Gandz, S. 1940 a. „Studies în Babylonian Mathematics III: Isoperimetric Problems and the Origin of the Quadratic Equations". *Isis,* 32, 103; quotes *Talmud,* „Sotah" IV, 4.

Gandz, S. 1940 b, ibid.; quotes from Heath 1956.

Gangestad, S.W., Thornhill, R, and Yeo, R.A. 1994. „Facial Attractiveness, Developmental Stability, and Fluctuating Asymmetry". *Ethology and Sociobiology,* 15, 73.

Carding, L., and Skau, C. 1994. „Niels Henrik Abel and Solvable Equations". *Archive for the History of Exact Sciences,* 48, 81.

Gardner, H. 1993. *Creating Minds* (New York: Basic Books).

Gardner, K.L. 1966. *Discovering Modern Algebra* (Oxford: University Press).

Gardner, M. 1959 a. „Mathematical Games: How three modern mathematicians disproved a celebrated conjecture of Leonhard Euler". *Scientific American,* 201 (November), 181.

Gardner, M. 1959 b. *Mathematical Puzzles of Sam Lloyd* (New York: Dover).

Gardner, M. 1979. *Mathematical Circus* (New York: Alfred A. Knopf).

Gardner, M. 1990. *The New Ambidextrous Universe: Symmetry and Asymmetry from Mirror Reflections to Superstrings* (New York: W.H. Freeman and Company).

Gârling, D.J.H. 1960. *A Course în Galois Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Garner, W.R. 1974. *The Processing of Information and Structure* (Hillsdale, NJ: Erlbaum).

Gauss, C.F. 1876. *Collected Works,* vol. 3 (în German, published in 1969 and in 1987 by Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht; there are also several publications by G. Olms, Hildesheim).

Gell-Mann, M. 1994. *The Quark and the Jaguar* (San Francisco: W.H. Freeman).

Gillings, R.J. 1972. *Mathematics in the Time of the Pharaohs* (Cambridge, MA: MIT Press).

Gândikin, S.G. 1988. *Tales of Physicists and Mathematicians* (Boston: Birkhäuser).

Girard, G. 1929. *Les Trois Glorieuses* (Paris: Firmin Didot).

Gisquet, H.J. 1840 – 1844. *Mémoires de M. Gisquet, ancien préfet de police, écrits par lui-même* (Bruxelles: Meline et Cans).

Glashow, S. 1988. *Interactions* (New York: Time-Warner Books).

Gleason, A.M. 1990. În *More Mathematical People,* D.J. Albers, G.L. Alexanderson, and C. Reed, eds. (Boston: Harcourt Brace Jovanovich).

Gleick, J. 2003. *Isaac Newton* (New York: Pantheon).

Gliozzi, M. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Goldsmith, D. 2000. *The Runaway Universe: The Race to Discover the Future of the Cosmos* (New York: Perseus Publishing).

Goldstein, E.B. 2002. *Sensation and Perception* (Pacific Grove, CA: Wadsworth).

Gombrich, E.H. 1995. *The Story of Art,* 16th edition (London: Phaidon Press Inc.).

Goodman, R. 2004. „Alice Through Looking Glass After Looking Glass: The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes". *The American Mathematical Monthly,* 111 (4), 281.

Gorenstein, D. 1982. *Finite Simple Groups: An Introduction to Their Classification* (New York: Plenum Press).

Gorenstein, D. 1985. „The Enormous Theorem. „*Scientific American,* 253, 104.

Gorenstein, D. 1986. „Classifying the Finite Simple Groups". *Bulletin of the American Mathematical Society,*

14, 1.

Goudey, C. 2001 – 2003. http://cubeland.free.fr/infos/infos.htm/.

Gow, J. 1968. *A Short History of Greek Mathematics* (New York: Chelsea Publishing Company).

Grammer, K., Fink, B., M0 ller, A.P., and Thornhill, R 2003. „Darwinian Aesthetics: Sexual Selection and the Biology of Beauty". *Biological Reviews*, 78, 385.

Grammer, K., and Thornhill, R. 1994. „Human (Homo Sapiens) Facial Attractiveness and Sexual Selection: The Role of Symmetry and Average-ness. *„Journal of Comparative Psychology,* 108, 233.

Gray, J. 2004. *Gauss: Titan of Science* (Cambridge: Cambridge University Press).

Gray, J.J. 1979. „Non-Euclidean Geometry – A Reinterpretation". *Historia Mathematica,* 6 (3), 236.

Gray, J.J. 1995. „Arthur Cayley (1821 – 1895)". *The Mathematical Intelligencer,* 17 (4), 62.

Green, M.B. 1986. „Superstrings". *Scientific American,* 255, 48.

Greene, B. 1999. *The Elegant Universe* (New York: W.W. Norton).

Greene, B. 2004. *The Fabric of the Cosmos* (New York: Alfred A. Knopf).

Gregory, R. 1997. *Mirrors în Mind* (New York: W.H. Freeman).

Gribbin, J. 1999. *The Search for Superstrings, Symmetry, and the Theory of Everything* (New York: Little, Brown and Company).

Grünbaum, B., Grünbaum, Z., and Shephard, G.C. 1986. În *Symmetry,* I. Hargittai, ed. (New York: Pergamon Press), 641.

Guth, A.H. 1997. *The Inflationary Universe* (Reading, MA: Helix Books).

Hafele, J.C., and Keating, R.E. 1972 a. „Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains". *Science,* 177, 166.

Hafele, J. C, and Keating, R.E. 1972 b. „Around-the-

World Atomic Clocks: Observând Relativistic Time Gains". *Science,* 177, 168.

Hale, J. 1994. *The Civilization of Europe in the Renaissance* (New York: Atheneum).

Hall, B.C. 2003. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* (Berlin: Springer-Verlag).

Halsted, G.B. 1895. „Biography, Lobachevsky". *American Mathematical Monthly,* 2, 137.

Hamilton, W.D., and Zuk, M. 1982. „Heritable True Fitness and Bright Birds: A Role for Părăsites?" *Science,* 218, 384.

Hares-Stryker, C., ed. 1997. *An Anthology of Pre-Raphaelite Writings* (New York: New York University Press), 284.

Hargittai, I. 1986. *Symmetry: Unifying Human Understanding* (New York: Pergamon Press).

Hargittai, I. 1989. *Symmetry 2: Unifying Human Understanding* (New York: Pergamon Press).

Hawking, S., and Penrose, R. 1996. *the nature of Space and Time* (Princeton: Princeton University Press).

Heath, T. 1956. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (New York: Dover Publications).

Heath, T. 1981. *A History of Greek Mathematics* (New York: Dover Publications).

Heilbronner, E., and Dunitz, J.D. 1993. *Reflections on Symmetry* (Basel: Verlag Helvetica Chimica Acta).

Henry, C. 1879. „*Manuscrits de Sophie Germain". Revue philosophique de la France et de l'étranger,* 8, 619.

Hill, E.L. 1946. „A Note on the Relativistic Problem of Uniform Rotation". *Physical Review,* 69, 488.

Hines, T. 1998. „Further on Einstein's Brain". *Experimental Neurology,* 150, 343.

Hodde, L.D.L. 1850. *Histoire de sociétés secrètes et du parţi républicain de 1830 à 1848* (Paris: Julien, Lanier et Cie).

Hofmann, J.E. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Hofstadter, D.R. 1979. *Godei, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (New York: Basic Books).

Holst, E., Stornier, C., and Sylow, L., eds. 1902. Festskrift ved hundreaarsju-biloeet for Niels Henrik Abel fosdel (Christiania).

Howe, E.S. 1980. „Effects of Parţial Symmetry, Exposure Time, and Backward Masking on Judged Goodness and Reproduction of Visual Patterns". *Quarterly Journal of Experimental Psychology,* 32, 27.

Hoyle, F. 1977. *Ten Faces of the Universe* (San Francisco: W.H. Freeman and Company).

Hugo, V. 1862. *Les Misérables* (Bruxelles: A. Lacroix, Verboeckhoven & Cie.), translated by C.E. Wilbour (New York: Modern Library, 1902).

Huxley, T.H. 1868. „A Liberal Education". http://human-nature.com/ Darwin/huxiey/chap2.html.

Hyatt King, A. 1944. „Mozart's Piano Music". *The Music Review*, 5, 1 63 – 191.

Hyatt King, A. 1976. *Mozart în Retrospect* (Westport, CT: Greenwood Press).

Icke, V. 1995. *The Force of Symmetry* (Cambridge: Cambridge University Press).

Infantozzi, C.A. 1968. „Sur la mort d'Evariste Galois". *Revue d'histoire des sciences,* 21, 1968.

Infeld, L. 1948. *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois (*New York: Whittlesey House, McGraw-Hill).

Jackson, L.A. 1992. *Physical Appearance and Gender: Sociobiological and Sociocultural Perspectives* (Albany: State University of New York Press).

James, I. 2002. *Remarkable Mathematicians: From Euler to von Neumann* (Cambridge: Cambridge University Press).

Jayawardene, S.A. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography, C.C.* Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Johnstone, R.A. 1994. „Female Preference for Symmetrical Males as a By-Product of Selection formate

Recognition". *Nature,* 372, 172.

Jones, D. 1996. *Physical Attractiveness and the Theory of Sexual Selection* (Ann Arbor: University of Michigan Press).

Joyner, D. 2002. *Adventures în Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine and Other Mathematical Toys* (Baltimore: John's Hopkins University Press).

Julesz, B. 1960. „Binocular Depth Perception of Computer-Generated Patterns". *Bell Sistem Tehnical Journal,* 39, 1125.

Kaku, M. 1994. *Hyperspace* (New York: Oxford University Press).

Kaku, M. 2004. *Einstein's Cosmos* (New York: Atlas Books).

Kaiin, N.H. 1993. „The Neurobiology of Fear". *Scientific American,* May, 94.

Kane, G.L. 2000. *Supersymmetry: Unveiling the Ultimate Laws of Nature* (New York: Perseus).

Kaplan, A. 1990. *Sefer Yetzira: The Book of Creation: În Theory and Practice* (Boston: Weiser).

Katz, V. 1989. „Historical Notes", în Fraleigh 1989.

Keiner, I. 1986. „The Evolution of Group Theory: A Brief Survey". *Mathematics Magazine*, 59 (4), 195.

Keller, J.B. 1986. „The Probability of Heads". *American Mathematical Monthly*, 93, 191.

Kepler, J. 1966. *The Six-Cornered Snowflake* (Oxford: Oxford University Press; originally published in 1611).

Keyser, C.J. 1956. „The Group Concept". În *The World of Mathematics,* vol. 3, J.R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster; republished in 2000, Mineola, NY: Dover).

Kiernan, B.M. 1971. „The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin". *Archive for History of Exact Sciences,* 8, 40.

Kimberling, C. 1972. „Emmy Noether". *American Mathematical Monthly,* 79, 136.

Kirshner, R.P. 2002. *The Extravagant Universe: Exploding Stars, Dark Energy and the Accelerating*

Cosmos (Princeton: Princeton University Press).

Klein, F. 1884. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree, G.*G. Morrice, trans. Published in 1956 by Dover (New York).

Kline, H.M., and Alder, M. 2000. www.marco-learningsystems.com/pages/kline/Johnny/johnny-chapt7 – 8.html/.

Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press).

Koliros, L. 1949. „Evariste Galois". *Elemente der Mathematik,* no. 7, 1 (Basel: Verlag Birkhäuser).

Kurzweil, R. 1999. *The Age of Spiritual Machines* (London: Orion Business Books).

Lamb, C. 1823. „Essays of Elia: The Two Races of Men". În *The Norton Anthology of English Literature,* bth edition, vol. 2 (New York: W.W. Norton).

Langlois, J.H., Kalakanis, L., Rubenstein, A.J., Larson, A., Hallam, M., and Smoot, M. 2000. „Maxims or Myths of Beauty? A Meta-Analytic and *Teoretical Review". Psychological Bulletin,* 126, 390.

Langlois, J.H., and Roggeman, L.A. 1990. „Attractive Faces Are Only *Average". Psychological Science,* 1, 115.

Langlois, J.H., Roggman, L.A., and Musselman, L. 1994. „What Is Average and What Is Not Average About Attractive Faces?" *Psychological Science,* 5 (4), 214.

Langlois J.H., Roggman, L.A., and Reiser-Danner, L.A. 1990. „Infants' Differenţial Social Responses to Attractive and Unattractive Faces". *Developmental Psychology,* 26, 153.

Laudal, O.A., and Piene, R., eds. 2004. *The Legacy of Niels Henrik Abel: The Abel Bicentennial, Oslo, June 3 – 8, 2002* (Berlin: Springer).

Lederman, L., with Tersei, D. 1993. *The God Particle* (Boston: Houghton Mifflin). Lederman, L.M., and Hill, C.T. 2004. *Symmetry and the Beautiful Universe* (Amherst, NY: Prometheus).

LeDoux, J.E. 1996. *The Emotional Brain* (New York: Simon & Schuster). Leeuwenberg, E.L.J. 1971. „A

Perceptual Coding Language for Visual and Auditory Patterns". *American Journal of Psychology,* 84 (3), 307.

Levey, M. 1954. „Abraham Savasorda and His Algorism: A Study in Early European Logistic". *Osiris,* 11, 50.

Lévi-Strauss, C. 1949. *The Elementary Structure of Kinship.* Republished in 1971 (Boston: Beacon Press).

Lévi-Strauss, C. 1958. *Structural Anthropology.* Republished in 1974 (New York: Basic Books). Levy, S. „I Found Einstein's Brain".http://www.echonyc.com/-steven/einstein.html/.

Lewin, D. 1993. *Musical Form and Transformation: 4 Analytic Essays* (New Haven: Yale University Press).

Lindley, D. 1996. *Where Does the Weirdness Go?* (New York: Basic Books).

Liouville, J., ed. 1846. „Oeuvres mathématiques d'Évariste Galois". *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 11, 381.

Lipkin, H.J. 2002. *Lie Groups for Pedestrians* (Mineola, NY: Dover Publications).

Livio, M. 2000. *The Accelerating Universe: Infinite Expansion, the Cosmological Constant, and the Beauty of the Cosmos* (New York: Wiley).

Livio, M. 2002. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number* (New York: Broadway Books).

Loeb, A.L. 1971. *Color and Symmetry* (New York: John Wiley & Sons).

Loftus, M.J. 2001. „The Rorschach Inkblot Test". *Emory Magazine,* vol. 77, number 2.

Lombroso, C. 1895. *The Man of Genius* (London: Charles Scribner's Sons).

Ludwig, A.M. 1995. *The Price of Greatness: Resolving the Creativity and Madness Controversy* (New York: Guilford Press).

Lyytinen, A., Brakefield, P.M., and Mappes, J. 2003. „Significance of Butterfly Eyespots as an Anti-Predator Device în Ground-Based and Aerial Attacks". *Oikos,* 100,

373.

MacCarthy, F. 1995. *William Morris: A Life for Our Time* (London: Faber and Faber).

MacGillavry, C.H. 1976. *Fantasy & Symmetry: The Periodic Drawings of M.C. Escher* (New York: Harry N. Abrams).

Mach, E. 1914. *The Analysis of Sensation* (Chicago: Open Court); republished in 1959 by Dover (New York).

MacKinnon, D.W. 1975. „IPAR's Contribution to the Conceptualization and Study of Creativity", în *Perspectives în Creativity,* I. Taylor and J.W. Getzels, eds. (Chicago: Aldine Publishing).

Maher, J., and Groves, J. 1996. *Introducing Chomsky* (Cambridge, England: Icon Books).

Malkin, I. 1963. „On the 150th Anniversary of the Birth Date of an Immortal în Mathematics". *Scripta Mathematica,* 26, 197.

Maor, E. 1994. *The Story of a Number* (Princeton: Princeton University Press).

Marr, D. 1982. *Vision* (New York: W.H. Freeman).

Maxwell, E.A. 1965. *Gateway to Abstract Algebra* (Cambridge: Cambridge University Press).

Mayer, O. 1982. „János Bolyai's Life and Work", în *Proceedings of the National Colloquium on Geometry and Topology* (Napoca, România: Cluj-Napoca Tehnical University Press).

McWeeny, R. 2002. *Symmetry: An Introduction to Group Theory and Its Applications* (Mineola, NY: Dover).

Mendola, J.D., Dale, A.M., Fischel, B., Liu, A.K., and Tootell, R.B.H. 1999. „The Representation of Illusory and Real Contours în Human Cortical Visual Areas Revealed by FMRI". *Journal of Neuroscience,* 19, 8560.

Menz, C. 2003. *Morris & Co.* (Adelaide, Australia: Art Gallery of South Australia).

Mezrich, B. 2002. *Bringing Down the House* (New York: Free Press).

Miller, A.I. 1996. *Insights of Genius: Imagery and Creativity în Science and Art* (New York: Copernicus).

Miller, A.I. 2001. *Einstein, Picasso* (New York: Perseus Books).

Miller, G.F. 2000. *The Mating Mind* (New York: Doubleday).

Misner, C. W, Thorne, K.S., and Wheeler, J.A. 1973. *Gravitation* (San Francisco: W.H. Freeman).

Mittag-Leffler, G. 1904. „Niels Henrik Abel". *Ord Och Bild,* 12, 65, and 129.

Mittag-Leffler, G. 1907. „Niels Henrik Abel". *Revue du Mois* (Paris), 4, 5, and 207.

Miller, A.P. 1992. „Female Swallow Preference for Symmetrical Male Sexual Ornaments". *Nature,* 357, 238.

Moller, A.P. 1994. *Sexual Selection and the Barn Swallow* (Oxford: Oxford University Press).

Moller, A.P., and Swaddle, J.P. 1997. *Asymmetry, Developmental Stability and Evolution* (Oxford: Oxford University Press).

Molnar, V., and Molnar, F. 1986. „Symmetry-Making and – Breaking în Visual Art. „*Computers and Mathematics with Applications,* 12B, Nos. 1 – 2, 291 – 301.

Mondor, H. 1954. „L'étrange rencontre de Nerval et de Galois". *Arts,* 7 Juillet.

Mosotti, A. 1972. În *Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Motte, A. 1995, trans. *The Principia* (Amherst, NY: Prometheus Books). Newton's 1686 masterpiece was translated by Andrew Motte în 1729.

Mozart, W.A., et al. 1966. *The Letters of Mozart and His Family,* vol. 1, 2nd edition, Emily Anderson, trans. (London: Macmillan), p. 130, p. 137.

Mozzochi, C.J. 2004. *The Fermat Proof* (Victoria, Canada: Trafford Publishing).

Mumford, D., Series, C., and Wright, D. 2002. *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein* (Cambridge: Cambridge University Press).

N. E. Thing Enterprises. 1995. *Magic Eye Gallery: A Showing of 88 Images* (Kansas City: Andrews & McMeel).

Nagy, D. 1995. „The 2, 500-Year-Old Term Symmetry în Science and Art and Its Missing Link Between the Antiquity and the Modern Age". *Symmetry: Culture and Science,* 6, 18.

Newman, J.R. 1956. „The Rhind Papyrus", în *The World of Mathematics,* J.R. Newman, ed. (New York: Simon & Schuster).

Noether's theorem. http://en.wikipedia.org/wiki/Noether%27 s theorem/.

Novy, L. 1973. *Origins of Modern Algebra* (Praque: Academia).

O'Connor, J. J, and Robertson, E.F. 1996 a. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bring.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1996 b. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Galois.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1996 c. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Germain.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1996 d. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Cayley.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1996 e. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/Hist Topics/Non-Euclideangeometry.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1997. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Tschimhaus.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1998. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1999 a. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Al-Khwarizmi.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 1999 b. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Abraham.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2000 a. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Hist Topics/Babylonianmathematics.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2000 b. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Hist Topics/Egyptianmathematics.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2000 c. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Hist Topics/Egyptianpapyri.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2000 d. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Matbematicians/Gregory.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2001 a. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Bezout.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2001 b. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Birkhoff.html/.

O'Connor, J.J., and Robertson, E.F. 2002. www-history. mes. st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Lie.html/.

Odifreddi, P. 2004. *The Mathematical Century: The 30 Greatest Problems of the Last 100 Years* (Princeton: Princeton University Press).

Olson, S. 2004. *Count Down* (Boston: Houghton Mifflin).

Ore, O. 1953. *Cardano, the Gambling Scholar* (Princeton: Princeton University Press).

Ore, O. 1954. Me/5 *Henrik Abel: Et geni og hans Samtid* (Oslo: Gyldendal Norsk Forlag). Translated into English în 1957 as *Niels Henrik Abel: Mathematician Extraordinary* (Minneapolis: University of Minnesota Press).

Ore, O. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Osborne, H. 1952. *Theory of Beauty: An Introduction to Aesthetics* (London: Routledge & Kegan Paul).

Osborne, H. 1986. „Symmetry as an Aesthetic

Factor". *Computers & Mathematics with Applications,* 12B, Nos. 1 – 2, 77.

Osen, L.M. 1974. *Women în Mathematics* (Cambridge, MA: MIT Press).

Overbye, D. 2000. *Einstein în Love: A Scientific Romance* (New York: Viking). *Oxford English Dictionary.* 1978 (Oxford: Oxford University Press).

Pagan Westphal, S. 2003. „Decoding the Ys and Wherefores of Males". *New Scientist, 21* June, 15.

País, A. 1982. *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein* (New York: Oxford University Press).

Palmer, A.R. 1994. „Fluctuating Asymmetry Analysis: A Primer", în *Developmental Instability: Its Origins and Evolutionary Implications*, T.A. Markow, ed. (Dordrecht, The Netherlands: Kluwer), 335.

Palmer, S.E. 1991. „Goodness, Gestalt, Groups, and Garner: Local Symmetry Subgroups as a Theory of Figurai Goodness", în *The Perception of Structure: Essays în Honor of Wendell R, Garner,* G.R. Lockheed and J. R.; Pomerantz, eds. (Washington, DC: American Psychological Association), 23.

Palmer, S.E. 1999. *Vision Science* (Cambridge, MA: MIT Press).

Palmer, S.E., and Hemenway, K. 1978. „Orientation and Symmetry: Effects of Multiple, Rotaţional, and Ne-ar Symmetries. *„Journal of Experimental Psychology,* 4 (4), 691 – 702.

Paraskevopoulos, I. 1968. „Symmetry, Recall, and Preference în Relation to Chronological Age". *Journal of Experimental Child Psychology*, 6, 254 – 264.

Parry, L., ed. 1996. *William Morris* (New York: Harry N. Abrams).

Pascal, A. 1914. „Girolamo Saccheri Nella Vita e Nelle Opere". *Giornale di Matematica di Battaglini*, 52, 229.

Paterniţi, M. 2000. *Driving Mr. Albert: A Trip Across America with Einstein's Brain* (New York: Dial Press).

Patterson, E.M., and Rutherford, D.E. 1965. *Elementary Abstract Algebra* (Edinburgh: Oliver and Boyd).

Permişi, E. 2004. „Speaking în Tongues". *Science,* 303, 1321.

Penrose, R. 2004. *The Road to Reality* (London: Jonathan Cape).

Perrett, D.I., May, K.A., and Yoshikawa, S. 1994. „Facial Shape and Judgements of Female Attractiveness". *Nature,* 368, 239.

Perrett, D.I., Penton-Voak, I.S., Little, A.C., Tiddeman, B.P., Burt, D.M., Schmidt, N., Oxiey, R., and Barrett, L. 2002. „Facial Attractiveness Judgements Reflect Learning of Parental Age Characteristics". *Proceedings of the Royal Society of London B,* 269 (1494), 873.

Peste, P. 2003. *Abel's Proof: An Essay on the Sources and Meaning of Mathematical Unsolvability* (Cambridge, MA: The MIT Press).

Peterson, I. 2000. „Completing Latin Squares". *Science News Online,* 157, No. 19, http://www.sciencenews.org/20000506/mathtrek.asp.

Peterson, I. 2004. „Heads or Tails?" *Science News,* February 28.

Petsinis, T. 1988. *The French Mathematician* (New York: Walker & Company).

Picard, E., ed. 1897. *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois* (Reprinted în 1951, Paris: Gauthier-Villars).

Pickover, C.A. 2001. *Wonders of Numbers* (Oxford: Oxford University Press).

Pinker, S. 1994. *The Language Instinct* (New York: Morrow).

Pinker, S. 1997. *How the Mind Works* (New York: W.W. Norton & Company).

Portnoy, E. 1982. „Riemann's Contribution to Differenţial Geometry". *Historia Mathematica,* 9 (1), 1.

Putz, J.F. 1995. „The Golden Section and the Piano

Sonatas of Mozart". *Mathematics Magazine,* 68, 275 – 282.

Rahn, J. 1980. *Basic Atonal Theory* (New York: Schirmer Music Books).

Raspail, F.-V. 1839. *Réforme pénitentiaire: Lettres sur les prisons de Paris* (Paris: Tamisey et Champion).

Rees, M. 1997. *Before the Begining* (Reading, MA: Helix Books).

Revue encyclopédique, t. 55, 568, Septembre 1832.

Ridley, M. 2003. *The Red Queen* (New York: Perennial); originally published in 1993 by Penguin (London).

Rikowski, A., and Grammer, K. 1999. „Human Body Odour, Symmetry and Attractiveness". *Proceedings of the Royal Society of London B*, 266, 869.

Ritter, F. 1895. „Franlois Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 15401603. Essai sur să vie et son oeuvre". *Revue Occidentale Philosophique Sociale et Politique,* 10, 234; 354.

Rock, I. 1973. *Orientation and Form* (New York: Academic Press).

Rose, P.L. 1975. *The Italian Renaissance of Mathematics* (Genève: Librairie Droz).

Rosen, J. 1975. *Symmetry Discovered: Concepts and Applications in Nature and Science* (Cambridge: Cambridge University Press).

Rosen, J. 1995. *Symmetry în Science: An Introduction to the General Theory* (New York: Springer-Verlag).

Rosen, M.I. 1995. „Niels Henrik Abel and Equations of the Fifth Degree". *American Mathematical Monthly,* 102, 495.

Rosenbaum, D.E. 1970. „Statisticians Charge Draft Lottery Was Not Random". *New York Times,* Jan. 4, 1970.

Rossi, B., and Hall, D.B. 1941. „Variation of the Rite of Decay of Mesotrons with Momentum". *Physical Review*, 59, 223.

Rothenberg, A., and Hausman, C.R., eds. 1976. *The Creativity Question* (Durham: Duke University Press).

Rothman, T. 1982 a. „Genius and Biographers: The

Fictionalization of Evariste Galois". *The American Mathematical Monthly,* 89, 2, 84; revised at: http://godel.ph. utexas.edu/-tonyr/galois.html/.

Rothman, T. 1982 b. „The Short Life of Evariste Galois". *Scientific American,* 246, 4, 136.

Rotman, J. 1990. *Galois Theory* (New York: Springer-Verlag).

Rotman, J.J. 1995. *An Introduction to the Theory of Groups* (New York: Springer-Verlag).

Rozen, S., Skaletsky, H., Marszalek, J.D., Minx, P.J., Cordam, H.S., Water-ston, R. H, Wilson, R.K., and Page, D.C. 2003. „Abundant Gene Conversion between Arms of Palindromes în Human and Ape Y Chromosomes". *Nature,* 423, 873.

Rubik, E., Varga, T., Kéri, G., Marx, G., and Vekerdy, T. 1987. *Rubik's Cubic Compendium* (Oxford: Oxford University Press).

Sabbagh, K. 2003. *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem în Mathematics* (New York: Farrar, Straus & Giroux).

Sampson, J.H. 1990 – 1991. „Sophie Germain and the Theory of Numbers". *Archive for History of Exact Science,* 41, 157.

Sarton, G. 1921. „Evariste Galois". *The Scientific Monthly,* 13, 363; reprinted în 1937, Osz n's, 3, 241.

Sartre, J.-P. 1964. *Les Mots* (Paris: Gallimard).

Schaal, B., and Porter, R.H. 1991. „Microsmatic Humans Revisited: The Generation and Perception of Chemical Signals". *Advances in the Study of Behavior,* 20, 474.

Schattschneider, D. 2004. *M.C. Escher: Visions of Symmetry* (New York: Harry N. Abrams).

Schoenberg, A. 1969. *Structural Functions of Harmony* (New York: W.W. Norton).

Scholz, E. 1992. „Riemann's Vision of a New Approach to Geometry", în *1830 – 1930: A Century of Geometry,* L. Boi, D. Flament, and J.M. Sal-anskis, eds. (Berlin: Springer-Verlag), 22.

Schultz, P. 1984. „Tartaglia, Archimedes and Cubic Equations”. *Gazette Australian Mathematical Society,* 11 (4), 81.

Schwarz, C. 2002. *Tales from the Subatomic Zoo* (Staatsburg, NY: Small World Books; www.smaliworidbooks.net).

Schwarz, P.M., and Schwarz, J.H. 2004. *Special Relativity: From Einstein to Strings* (Cambridge: Cambridge University Press).

Schweitzer, A. 1967. /. *S. Bach* (vol. 1) (Mineola, NY: Dover Publications).

Shackelford, T.K., and Larsen, R.J. 1997. „Facial Asymmetry as Indicator of Psychological, Emoţional, and Physiological *Distress”. Journal of Personality and Social Psychology,* 72, 456.

Shubnikov, A.V., and Koptsik, V.A. 1974. *Symmetry în Science and Art* (New York: Plenum Press).

Shurman, J. 1997. *Geometry of the Quintic* (New York: John Wiley & Sons).

Silk, J. 2000. *The Big Bang,* 3rd ed. (New York: Times Books).

Simonton, D.K. 1999. *Origins of Genius* (New York: Oxford University Press).

Singh, D. 1993. „Adaptive Significance of Female Physical Attractiveness: Role of Waist-to-Hip Ratio”. *Journal of Personality and Social Psychology*, 65, 293.

Singh, D. 1995. „Female Health, Attractiveness, and Desirability for Relationships: Role of Breast Asymmetry and Waist-to-Hip Ratio”. *Ethology and Sociobiology,* 16, 465.

Singh, S. 1997. *Fermat’s Enigma* (New York: Anchor Books).

Skaletsky, H., et al. 2003. „The Male-Specific Region of the Human Y Chromosome Is a Mozaic of Discrete Sequence Classics”. *Nature,* 423, 825.

Smith, D.K. 1997. „Mathematics, marriage and finding somewhere to cat”. http://www.pass.maths.org.uk/issue3/marriage/index.html/.

Smith, T.A. 1996. http://jan. uce. n-au.edu/-tasă/musoffcanons.html.

Smolin, L. 2002. *Three Roads to Quantum Gravity* (New York: Perseus Books).

Solomon, R. 1995. „On Finite Simple Groups and Their Classification". *Notices of the AMS,* 42 (2), 231.

Sommerville, D. Y 1960. *Bibliography of Non-Euclidean Geometry,* 2nd ed. (New York: Chelsea).

Spearman, B.K., and Williams, K.S. 1994. „Characterization of Solvable Quintics *x5 + ax + b". American Mathematical Monthly,* 101, 986.

Stachel, J., ed. 1989. *The Collected Papers of Albert Einstein,* vols. 1 and 2 (Princeton: Princeton University Press).

Starr, N. 1997. „Nonrandom Risk: The 1970 Draft *Lottery". Journal of Statistical Education*, 5, no. 2.

Steiner, G. 2001. *Grammars of Creation* (London: Faber and Faber).

Sternberg, R.J., ed. 1998. *Handbook of Creativity* (Cambridge: Cambridge University Press).

Stevens, P.S. 1996. *Handbook of Regular Patterns* (Cambridge, MA: The MIT Press).

Stewart, I. 1995. *Concepts of Modern Mathematics* (Mmeola, NY: Dover).

Stewart, I. 2001. *What Shape Is a Snowflake?* (New York: W.H. Freeman).

Stewart, I. 2004. *Galois Theory* (Boca Raton, FI: Chapman & Hall/CRC).

Stewart, I., and Golubitsky, M. 1992. *Fearful Symmetry: Is God a Geometer?* (Oxford: Blackwell).

Stubhaug, A. 2000. *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames Afar* (Berlin: Springer). This is a translation of the 1996 Norwegian *Et foranskutt lyn, Niels Henrik Abel og bans tid* (Oslo: H. Aschehoug & Co.).

Stubhaug, A. 2002. *The Mathematician Sophus Lie* (Berlin: Springer-Verlag).

Swaddle, J.P., and Cuthill, I.C. 1994. „Preference for Symmetric Males by Female Zebra Finches". *Nature,* 367,

165.

Sylow, L., and Lie, S., eds. 1881. *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel* (Christiania: Grondahl & Son); reprinted în 1965 by Johnson Reprint (New York).

Szénassy, B. 1992. *History of Mathematics în Hungary unul the 20th Century* (Berlin: Springer-Verlag).

Szilágyi, P.G., and Baird, J.C. 1977. „A Quantitative Approach to the Study of Visual Symmetry". *Perception & Psychophysics,* 22 (3), 287.

Tannery, J., ed. 1906. „Manuscrits et papiers inédits de Galois". *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2nd ser., 30, 246, and 255.

Tannery, J., ed. 1907. „Manuscrits et papiers inédits de Galois". *Bulletin des Sciences mathématiques,* 2nd ser., 31, 275.

Tannery, J., ed. 1908. *Manuscrits de Evariste Galois* (Paris: Gauthier-Villars).

Tannery, J. 1909. „Discours Prononcé à Bourg-La-Reine". *Bulletin des Sciences mathématiques,* année 19, 1.

Tarr, M.J., and Pinker, S. 1989. „Mental Rotation and Orientation-Dependence în Shape Recognition". *Cognitive Psychology*, 21, 233.

Taton, R. 1947. „Les Relations de Galois avec les mathématiciens de son temps". *Revue d'histoire des sciences,* 1, 114.

Taton, R. 1971. „Sur les relations scientifiques d'Augustin Cauchy et d'Évariste Galois". *Revue d'histoire des sciences,* 24, 123.

Taton, R. 1972. „Evariste Galois", în *Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Taton, R. 1983. „Evariste Galois and His Contemporanes". *Bulletin of London Mathematical Society,* 15, 107.

Taylor, R.E. 1942. *No Royal Road* (Chapel Hill: University of North Carolina Press).

Terquem, O. 1849. „Biographie. Richard, Professeur". *Nouvelles armales de mathématiques*, 8, 448.

Thomas, R. 2001. „And the Winner Is…" *Plus,* 16 (news) http://plus. maths.org/.

Thornhill, R., and Gangestad, S.W. 1996. „The Evolution of Human Sexuality". *Trends în Ecology and Evolution,* 11, 98.

Thornhill, R., Gangestad, S. W, and Comer, R. 1995. „Human Female Orgasm and Mate Fluctuating Asymmetry". *Animal Behaviour,* 50, 1601.

Thornhill, R., Gangestad, S. W, Miller, R., Scheyd, G., Knight, J., and Franklin, M. 2003. „MHC, Symmetry, and Body Scent Attractiveness în Men and Women". *Behavioral Ecology,* 14, 668.

Thornhill, R., and Grammer, K. 1999. „The Body and Face of a Woman: One Ornament That Signals Quality? „*Evolution and Human Behavior,* 20, 105.

Tignol, J.-P. 2001. *Galois' Theory of Algebraic Equations* (Singapore: World Scientific).

Tooby, J., and Cosmides, L. 1990. „On the Universality of Human Nature and the Uniqueness of the Individual: The Role of Genetics and Adaptation". *Journal of Personality,* 58, 17.

Tootell, R.B.H., Mendola, J.D., Hadjikhani, N.K., Liu, A.K., and Dale, A.M. 1998. „The representation of the ipsilateral visual field in the human cerebral cortex". *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 95, 818.

Toţi Rigatelli, L. 1996. *Evariste Galois 1811 – 1832* (Basel: Birkhäuser Verlag).

Tovey, D.F. 1957. *The Forms of Music* (New York: Meridian Books).

Trudeau, R.J. 1987. *The Non-Euclidean Revolution* (Boston: Birkhäuser).

Turnbull, H.W. 1993. *The Great Mathematicians* (New York: Barnes & Noble Books).

Tyler, C.W. 1983. „Senzory Processing of Binocular Disparity", în *Vergence Eye Movements: Basic and Clinical Aspects,* C.M. Schor and K.J. Ciuf-freda, eds. (London: Butterworths).

Tyler, C.W. 1995. „Cyclopean Riches: Cooperativity,

Neurontropy, Hysteresis, Stereoattention, Hyperglobality, and Hypercyclopean Processes în Random-Dot Stereopsis", *in Early Vision and Beyond,* T.V. Popathomas, C. Chubb, A. Gorea, and E. Kowler, eds. (Cambridge, MA: MIT Press).

Tyler, C. W, ed. 2002. *Human Symmetry Perception and Its Computational Analysis* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.).

Tyson, N.D.G., and Goldsmith, D. 2004. *Origins: Fourteen Billion Years of Cosmic Evolution* (New York: W. W Norton).

van der Helm, P.A., and Leeuwenberg, E.L. 1991. „Accesibility: A Criterion for Regularity and Hierarchy în Visual Pattern *Codes". Journal of Mathematical Psychology,* 35 (2), 151.

van der Woerden, B.L. 1983. *Geometry and Algebra în Ancient Civilizations* (Berlin: Springer-Verlag).

van der Woerden, B.L. 1985. *A History of Algebra* (Berlin: Springerverlag).

Verdier, N. 2003. „Evariste Galois, Le Mathématicien Maudit". *Pour la Science,* no. 14, 1.

Verriest, G. 1934. *Évariste Galois et la Théorie des Équations Algébriques* (Lonvain: Chez L'Auteur).

Vitruvius. Ca 27 BC. *De Architectura,* III, I, translated în 1914 by M.H. Morgan; reprinted 1960 by Dover Publications (New York).

Vogel, K. 1972. *În Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Vucinich, A. 1962. „Nicolai Ivanovich Lobachevskii: The Man behind the First Non-Euclidean Geometry". *Isis,* 53, 465.

Walser, H. 2000. *Symmetry* (Washington, DC: The Mathematical Association of America).

Washburn, D.K., and Crowe, D. W 1988. *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis* (Seattle: University of Washington Press).

Webb, S. 2004. *Out of This World* (New York: Copernicus Books).

Weinberg, S. 1992. *Dreams of a Final Theory* (New

York: Pantheon Books).

Wells, D. 1997. *Curious and Interesting Mathematics* (London: Penguin Books).

Wertheimer, M. 1912. „Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung". *Zeitschrift für Psychologie,* 61, 161.

Weyl, H. 1935. „Emmy Noether". *Scripta Mathematica,* 3, 201.

Weyl, H. 1952. *Symmetry* (Princeton: Princeton University Press).

Wheatstone, C. 1838. „Contributions to the Physiology of Vision. Part the First. On some remarkable, and hitherto unobserved, Phenomena of Binocular Vision". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Part* 1, 371 (reprinted în *The Scientific Papers of Sir Charles Wheatstone,* London, 1879, p. 225).

Wheeler, J.A. 1990. *A Journey into Gravity and Spacetime* (New York: Scientific American Library).

Whistler, J.M. 1890. „The Gentle Art of Making Enemies". *Propositions,* 2.

Whiteside, D.T. 1972. În *Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Wilde, O. 1892. *Lady Windermere's Fan,* act III.

Willard, H.F. 2003. „Tales of the Y Chromosome". *Nature,* 423, 810.

Wilson, D. 1986. „Symmetry and Its Love-Hate Role în Music". *Computers & Mathematics with Applications,* 12B, nos. 1 – 2, 101.

Wilson, E.B. 1945. „Obituary: George David Birkhoff". *Science (NS),* 102, 578.

Winchel, F. 1967. *Music, Sound and Sensation* (New York: Dover).

Winner, E. 1996. *Gifted Children: Myths and Realities* (New York: Basic Books).

Witelson, S.F., Kigar, D.L., and Harvey, T. 1999. „The Excepţional Brain of Albert Einstein". *The Lancet,* 353, 2149.

Witten, E. 2004 a. „Universe on a Strâng”. În *Origin and Fate of the Universe* (special cosmology issue of *Astronomy).*

Witten, E. 2004 b. „When Symmetry Breaks Down”. *Nature,* 429, 507.

Wolff, C. 2001. *Johann Sebastián Bach: The Learned Musician* (New York: W.W. Norton & Company).

Wolfram, S. 2002. *A New Kind of Science* (Champaign, IL: Wolfram Media), 873.

Wood, J.M., Nezworski, M.T., Lilienfeld, S.O., and Garb, H.N. 2003. *What's Wrong with the Rorschach?* (San Francisco: Jossey-Bass).

Wussing, H. 1984. *The Genesis of the Abstract Group Concept* (Cambridge, MA: The MIT Press).

Yaglom, I.M. 1988. *Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of the idea of Symmetry in the Nineteenth Century* (Boston: Birkhauser).

Yardley, P.D. 1990. „Graphical Solution of the Cubic Equation Developed from the Work of Omar Khayyam”. *Bull. Inst. Math. Appl,* 26, 5/6, 122.

Youschkevitch, A.P. 1972 a. *Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Youschkevitch, A.P. 1972 b. În *Dictionary of Scientific Biography,* C.C. Gillespie, ed. (New York: Charles Scribner's Sons).

Zahavi, A. 1975. „Mate Selection: A Selection for the Handicap”. *Journal of Teoretical Biology,* 53, 205.

Zahavi, A. 1991. „On the Definition of Sexual Selection, Fisher's Model, and the Evolution of Waste and of Signals în General”. *Animal Behavior,* 42 (3), 501.

Zahavi, A., and Zahavi, A. 1997. *The Handicap Principle: A Missing Piece of Darwin's Puzzle* (Oxford: Oxford University Press).

Zee, A. 1986. *Fearful Symmetry: The Search for Beauty în Modern Physics* (New York: Macmillan Publishing Company).

Zund, J.D. 1983. „Some Comments on Riemann's

Contributions to Differenţial Geometry". *Historia Mathematica,* 10 (1), 84.

Zweibach, B. 2004. *First Course în Strâng Theory* (Cambridge: Cambridge University Press).

Mulţumiri

5

Autorul şi editorul mulţumesc pentru permisiunea de retipărire a următoarelor materiale:

IMAGINI

Fig. 1, 3, 6 – 9, 12 – 15, 18 – 25, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 74 – 77, 79 – 82, 84, 87, 89, 90, 92, 96, 98, 100 – 105, şi figurile din Anexele 1 şi 10 de: Krista Wildt.

Fig. 2: Alinari/Art Resource, NY; Uffizi, Florence, Italy.

Fig. 4, 5, 25: de Ann Feild.

Fig. 10 a: Prin bunăvoinţa lui Ricardo Villa-Real. Detaliu din *The Alhambra and the Generalife* de Ricardo Villa-Real.

Fig. 10 b: M.C. Escher's „Symmetry Drawing El 16 (Fish)", © 22004 The M.C. Escher Company, Baarn, Holland. All Rights Reserved.

Fig. 11 a: Morris & Company, London (1861 – 1940), William Morris, designer (1834 – 1896): *Apple Wallpaper (blue),* London, realizare din 1877. Pictură în relief pe hârtie, sul de 56 cm lăţime. Donaţie de la Haslem & Whiteway Ltd. 2002, Art Gallery of South Australia, Adelaide.

Fig. 11 b: Morris & Company, London (1861 – 1940), William Morris, designer (1834 – 1896): *St. James wallpaper [fragment], 1884,* London, realizare din 1881. Pictură în relief pe hârtie, dim. nereg., aprox. 38, 5 X 17, 0 cm. Donaţie de la Scotch Collège, Torrens Park, Adelaide 1992, Art Gallery of South Australia, Adelaide.

Fig. 16: M.C. Escher's „Symmetry Drawing E97 (Dogs)", © 22004 The M.C. Escher Company, Baarn, Holland. All Rights Reserved.

Fig. 17: Prin bunăvoinţa lui Thomas M. Brown, NASA şi ESA.

Fig. 29: © 22004 Magic Eye Inc. /www.magiceye.com/.

Fig. 31: © 22005 Bridget Riley, all rights reserved.

Fig. 34: Fotografie e The British Museum.

Fig. 36, 39, 40, 41, 43 – 6, 78, 83: „Fondo Ritratti" din Biblioteca Speciale di Matematica „Giuseppe Peano", obţinute cu ajutorul Laurei Garbolino şi Liviei Giacardi.

Figs. 37, 42, 49, 58, 62, 73: Gratuit; realizate de autor.

Fig. 38: B.U.B., ms. 595, N, 7, c. 30 v., Biblioteca Universitaria di Bologna.

Fig. 47, 48, 51: Prin bunăvoinţa lui Arild Stubhaug. Din *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames Afar,* de Arild Stubhaug.

Fig. 50, 95: Departamentul de matematică, Universitatea din Oslo, Norvegia, cu ajutorul lui Yngvar Reichelt.

Fig. 52 – 56, 59, 68, 70 – 72: Administraţia oraşului Bourg-la-Reine, cu ajutorul lui Philippe Chaplain. Fig. 59: Archives Nationales F17.4176.

Fig. 57, 61, 66, 69: Bibliothèque de l'Institut de France, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 60: Réunion des Musées Nationaux/Art Resource, NY; Louvre, Paris, France.

Fig. 63: e Photothèque des musées de la ville de Paris/Cliché: Andreani. Musée Carnavalet.

Fig. 64: Bibl. Historique de la ville de Paris, Norbert Verdier.

Fig. 65, 106: Archives de l'Académie des sciences, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 67: Cent ans d'assistance publique à Paris, cu ajutorul lui Norbert Verdier.

Fig. 85, 88, 93, 94: Colecţia privată a Dr. Elliott Hinkes prezentată la „Celestial Harmony: Four Visions of the Universe", o expoziţie de la Milton S. Eisenhower Library, John's Hopkins University, 26 aprilie-30 mai 2004.

Fig. 86: Derby Museums şi Art Gallery.

Fig. 97: De John Bedke.

Fig. 99: Adaptare cu permisiunea primită de la Forsman & Meritaita 1999.

TEXT

Anexa 5: Versurile lui Tartaglia, retipărite cu permisiunea lui Ron G. Keightley.

Anexa 8: Arborele genealogic al familiei Galois, obţinut de la forul administrativ al oraşului Bourg-la-Reine, cu ajutorul lui Philippe Chaplain.

Poemul „Cromodinamică" (p. 257): Retipărit cu permisiunea lui Cindy Schwarz.

S-au făcut eforturi susţinute pentru contactarea deţinătorilor drepturilor de autor asupra imaginilor din această carte, dar în unele cazuri nu am reuşit să-i localizăm. Cei pe care nu i-am contactat sunt rugaţi să se adreseze la Simon & Schuster, 1230 Avenue of the Americas, New York, NY 10020.

Cuprins

1. Simetria 7
2. iiţnim iihco nî cârtemia 39
3. Să nu uitaţi niciodată acest lucru când vă cufundaţi printre ecuaţiile voastre 63
4. Matematicianul chinuit de sărăcie 107
5. Matematicianul romantic 131
6. Grupurile 182
7. Regulile de simetrie 229
8. Cine-i cel mai simetric dintre toţi? 270
9. Recviem pentru un geniu romantic 304

ANEXA 1. Problema ridicată de un joc de cărţi 321

ANEXA 2. Rezolvarea unui sistem de două ecuaţii liniare 322

ANEXA 3. Soluţia lui Diofant 323

ANEXA 4. O ecuaţie diofantică 324

ANEXA 5. Versurile şi formula lui Tartaglia 325

ANEXA 6. Provocarea lui Adriaan van Roomen… 328

ANEXA 7. Proprietăţile rădăcinilor ecuaţiilor de gradul doi 329

ANEXA 8. Arborele genealogic al lui Galois 331

ANEXA 9. Puzzle-ul 14 – 15 334

ANEXA 10. Soluţia problemei chibriturilor 335
Note 337
Bibliografie 357
Mulţumiri 387